

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

## ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

# Εισαγωγή στην Υπολογιστική των Δυναμικών Συστημάτων ( με τη χρήση του Mathematica )

**Βουγιατζής Γεώργιος**  
Λέκτορας

**Μελετλίδου Ευθυμία**  
Επίκουρος Καθηγήτρια

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής  
Τμήμα Φυσικής – Α.Π.Θ.

**Θεσσαλονίκη 2004**

## Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> . Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με το MATHEMATICA

Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> . Εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα

Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> . Συστήματα Ενός Βαθμού Ελευθερίας

Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> . Γραμμική προσέγγιση γύρω από σημεία ισορροπίας.

Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> . Μη Γραμμικά Συστήματα

Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> . Μη Αυτόνομα Συστήματα με Ένα Βαθμό Ελευθερίας.

Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup> . Διακριτά δυναμικά συστήματα - Απεικονίσεις

Τα προγράμματα που παρουσιάζονται αναφέρονται στην έκδοση 4.1 του Mathematica. Στην νέα έκδοση 5, ο αλγόριθμος επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων έχει βελτιωθεί και μπορεί να παρατηρηθούν μικρές, αλλά όχι ουσιώδεις , διαφορές στα αποτελέσματα μερικών προγραμμάτων.

## Κεφάλαιο 1ο.

### Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με το **MATHEMATICA**

#### 1.1 Συνήθειες Διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ)

Μια συνήθης διαφορική εξίσωση (ΔΕ)  $n$ -τάξης της άγνωστης συνάρτησης  $x = x(t) \in R$  περιγράφεται με μια εξίσωση της μορφής

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0 \quad \eta' \quad F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Οι ΔΕ στο **MATHEMATICA** γράφονται σε αντιστοιχία με τη παραπάνω μορφή, δηλαδή ή χρησιμοποιώντας τον τελεστή **D[ , ]** του **MATHEMATICA** ή τον συμβολισμό  $x'[t]$ ,  $x''[t]$  κ.ο.κ. Έτσι η ΣΔΕ

$$x' + t x'' = 1, \quad (2)$$

για την οποία η  $x$  αποτελεί την άγνωστη συνάρτηση και  $t$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, γράφεται

**In[1]:= eq1 = x'[t] + t x''[t] == 1**

**Out[1]=**  $x'[t] + t x''[t] == 1$  ή

**In[1]:= eq1 = D[x[t], t] + t D[x[t], {t, 2}] - 1 == 0**

**Out[1]=**  $-1 + x'[t] + t x''[t] == 0$

Όπως φαίνεται από το παραπάνω παράδειγμα, η άγνωστη συνάρτηση  $x$  πρέπει πάντα να συνοδεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή της. Η διαφορική εξίσωση αποθηκεύεται και μπορούμε να αναφερόμαστε σ' αυτή με το σύμβολο **eq1**.

Η επίλυση της ΔΕ γίνεται με την εντολή **DSolve** η οποία συντάσσεται με τρία βασικά ορίσματα, ως

**DSolve[ εξίσωση , άγνωστη συνάρτηση, ανεξάρτητη μεταβλητή]**

**DSolve[equation, x[t], t]**

Π.χ.

**In[2]:= sol1 = DSolve[eq1, x[t], t]**

**Out[2]=**  $\{ \{x[t] \rightarrow t + C[2] + C[1] \log[t]\} \}$

Επίσης στο δεύτερο όρισμα της **DSolve** μπορεί η άγνωστη συνάρτηση να εισαχθεί χωρίς την ανεξάρτητη μεταβλητή, οπότε παίρνουμε τη λύση σε μορφή καθαρής συνάρτησης (pure function), π.χ.

**In[3]:= sol1 = DSolve[eq1, x, t]**

**Out[3]=**  $\{ \{x \rightarrow \text{Function}[t], t + C[2] + C[1] \log[t]\} \}$

Οι ποσότητες,  $C[2]$  κλπ αποτελούν τις αυθαίρετες σταθερές της λύσης και οι οποίες είναι σε αριθμό όσες και η τάξη της ΔΕ. Οι  $C[i]$  είναι προστατευόμενες (protected) ποσότητες από το **MATHEMATICA** και για να πάρουν συγκεκριμένες τιμές ή να γίνουν σύμβολα που μπορεί να διαχειριστεί ο χρήστης θα πρέπει να αντικατασταθούν με τον τελεστή αντικατάστασης **/.**,

```
In[3]:= sol1 = sol1 /. {C[1] → c1, C[2] → c2}
```

```
Out[3]:= {{x[t] → c2 + t + c1 Log[t]}}
```

Συνήθως οι ΔΕ αντιμετωπίζονται σαν προβλήματα αρχικών τιμών στα οποία ζητούνται λύσεις που ικανοποιούν συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, δηλαδή για  $t=t_0$  η τιμή της ζητούμενης συνάρτησης  $x$  και των παραγώγων της μέχρι την  $n-1$  τάξη έχουν συγκεκριμένες τιμές ( $x(t_0)=a$ ,  $x'(t_0)=b$  κλπ). Στην περίπτωση αυτή η λύση που προκύπτει είναι μια μερική λύση χωρίς αυθαίρετες σταθερές και η **DSolve** συντάσσεται ως εξής

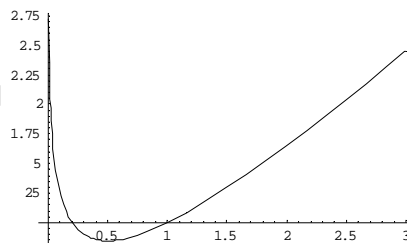
**DSolve**[{ΔΕ, συνθήκη1, συνθήκη2,...}, Άγνωστη συνάρτηση, Ανεξάρτητη μεταβλητή]

**DSolve**[{equation,  $y[x_0]=a, y'[x_0]=b, \dots$ },  $y[x], x$ ]

Για παράδειγμα αν για την εξίσωση (2) αναζητήσουμε τη λύση η οποία για  $t=1$  δίνει  $x(1)=1$  και  $x'(1)=1/2$ , θα πάρουμε τη λύση

```
In[5]:= msol1 = DSolve[{eq1, x[1] == 1, x'[1] == 1/2}, x[t], t]
```

```
Out[5]:= {{x[t] → 1/2 (2 t - Log[t])}}
```



η οποία προκύπτει από τη γενική λύση (out[3]) για  $C[1]=-1$  και  $C[2]=0$ . Έτσι αφού οι αρχικές συνθήκες συνδέονται με τις αυθαίρετες σταθερές μπορούμε να πάρουμε τη γενική λύση έτσι ώστε αντί των  $C[i]$  να εμφανίζονται άμεσα οι αρχικές συνθήκες, πχ

```
In[6]:= msol1 = DSolve[{eq1, x[1] == a, x'[1] == b}, x[t], t]
```

```
Out[6]:= {{x[t] → -1 + a + t - Log[t] + b Log[t]}}
```

Συνήθως οι αρχικές συνθήκες αναφέρονται σε  $t=0$  αλλά αυτό δεν είναι δυνατό στην παραπάνω περίπτωση.

## 1.2 Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Δύο ή περισσότερες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες περιέχουν περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, σχηματίζουν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Με τον όρο λύση του συστήματος εννοούμε την εύρεση όλων των άγνωστων συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Ως, παράδειγμα, θεωρούμε το παρακάτω σύστημα :

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{y} = x + y \quad (3)$$

που αποτελείται από δύο ΣΔΕ με άγνωστες συναρτήσεις τις  $x$  και  $y$  της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ . Η επίλυση του συστήματος γίνεται με την εντολή **DSolve** και η οποία συντάσσεται ως εξής

**DSolve**[{Εξίσωση1, Εξίσωση2 κλπ}, {Άγν.συναρτηση1, Άγν.συναρτηση 2, κλπ}, Ανεξάρτ μεταβλητή]

**DSolve**[{eq1, eq2, ...}, {y1[x], y2[x], ...}, x]

```
In[1]:= eq1 = x''[t] + x[t] == 0;
eq2 = y'[t] == x[t] + y[t];
sol1 = DSolve[{eq1, eq2, x[0] == x0, x'[0] == v0, y[0] == y0}, {x, y}, t] // FullSimplify

Out[3]= {{y -> Function[{t}, (-1/4 + I/4) e^{-it}
      (i v0 + e^{2it} v0 - (1 + i) e^{(1+i)t} v0 + x0 + i e^{2it} x0 - (1 + i) e^{(1+i)t} x0 - (2 + 2 i) e^{(1+i)t} y0)],
      x -> Function[{t}, 1/2 e^{-it} (i v0 - i e^{2it} v0 + x0 + e^{2it} x0)]}}
```

Οι παραπάνω λύσεις είναι πραγματικές αν και στο *MATHEMATICA* γίνεται τις περισσότερες φορές χρήση μιγαδικών συμβόλων. Επίσης μπορούμε, όπως και στην περίπτωση της μιας ΣΔΕ, να θεωρήσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

Στο παρακάτω παράδειγμα επιλύουμε το ίδιο σύστημα για αρχικές συνθήκες  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ ,  $y(0) = y_0$  και με τη χρήση του αλγεβρικού πακέτου *ReIm* δηλώνουμε ότι οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες είναι πραγματικές και παίρνουμε τη λύση σε συνήθη μορφή

```
In[10]:= << Algebra`ReIm`
Im[t] ^= 0; Im[x0] ^= 0; Im[y0] ^= 0; Im[v0] ^= 0; RealValued[x, y];
eq1 = x''[t] + x[t] == 0;
eq2 = y'[t] == x[t] + y[t];
solution = DSolve[{eq1, eq2, x[0] == x0, x'[0] == v0, y[0] == y0}, {x, y}, t];
solx = Re[x[t] /. solution[[1]]] // FullSimplify;
soly = Re[y[t] /. solution[[1]]] // FullSimplify;
Print["x(t)=", solx]
Print["y(t)=", soly]

x(t) = x0 Cos[t] + v0 Sin[t]
y(t) = 1/2 (e^t (v0 + x0 + 2 y0) - (v0 + x0) Cos[t] + (-v0 + x0) Sin[t])
```

### 1.3 Μετασχηματισμός ΣΔΕ ανώτερης τάξης σε σύστημα εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης

Μια ΣΔΕ ανώτερης τάξης  $n > 1$  μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο σύστημα  $n$  διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης εισάγοντας σαν νέες μεταβλητές τις  $n-1$  παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης  $x$  της ΣΔΕ. Έστω η ΣΔΕ 2<sup>ης</sup> τάξης

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + \sin t = 0 \quad (4)$$

Αν θέσουμε  $p = dx/dt$ , η (4) γράφεται σαν σύστημα με τη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = p - \sin t \quad (5)$$

Οι (4) και (5) αποτελούν ισοδύναμες εκφράσεις. Η εφαρμογή της *DSolve* στην (4) θα μας δώσει την λύση  $x = x(t; c_1, c_2)$  ενώ το  $p = p(t; c_1, c_2)$  προκύπτει από την παραγωγή της  $x$

```
In[1]:= (* Λύση σε μορφή καθαρής συνάρτησης *)
solution = DSolve[x''[t] - x'[t] + Sin[t] == 0, x, t]

Out[1]= {{x -> Function[{t}, e^t C[1] + C[2] - Cos[t]/2 + Sin[t]/2]}}
```

```
In[2]:= (* Μετατροπή της λύσης σε συνήθη συνάρτηση *)
x[t] = x[t] /. solution[[1]]
```

```
Out[2]= e^t C[1] + C[2] - Cos[t]/2 + Sin[t]/2
```

```
In[3]:= (* παραγωγή της λύσης *)
p[t] = D[x[t], t]
```

```
Out[3]= e^t C[1] + Cos[t]/2 + Sin[t]/2
```

Αν εφαρμόσουμε την *DSolve* στην (5) θα πάρουμε ως λύση και τις δύο συναρτήσεις  $x$  και  $p$  ταυτόχρονα

```
In[4]:= eq1 = x'[t] == p[t];
eq2 = p'[t] == p[t] - Sin[t];
solution = DSolve[{eq1, eq2}, {x, p}, t];
x[t] = x[t] /. solution[[1]] // Simplify
p[t] = p[t] /. solution[[1]] // Simplify
```

```
Out[4]= C[1] - C[2] + e^t C[2] - Cos[t]/2 + Sin[t]/2
```

```
Out[5]= 1/2 (2 e^t C[2] + Cos[t] + Sin[t])
```

Με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, μια ΣΔΕ  $n$ -τάξης μετατρέπεται σε σύστημα αν θέσουμε  $p_1 = dx/dt$ ,  $p_2 = d^2x/dt^2$ , ...,  $p_{n-1} = d^{n-1}x/dt^{n-1}$ . Αν και το *MATHEMATICA* δεν έχει περιορισμούς ως προς τον τρόπο γραφής των εξισώσεων, ο τρόπος γραφής (5) είναι πιο εύχρηστος και έτσι συνήθως αναφερόμαστε σε συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad \eta' \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

όπου τα  $x_i$  αποτελούν τις  $n$  άγνωστες συναρτήσεις του  $t$  της μορφής

$$x_i(t) = x_i(t; c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (7)$$

με  $c_1, c_2, \dots, c_n$  αυθαίρετες σταθερές που συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή τις τιμές των  $x_i = x_{i0}$  σε μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t=t_0$ .

Αν το σύστημα (6) είναι της μορφής

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ dx_2/dt &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ dx_n/dt &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{aligned} \quad \eta' \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \quad (8)$$

όπου  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  ένας  $n \times n$  πίνακας με στοιχεία συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  και  $\vec{x}, \vec{b}$  τα διανύσματα-στήλες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  και  $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ ,  $b_i = b_i(t)$  αντίστοιχα, το σύστημα

ονομάζεται **γραμμικό**. Αν οι συντελεστές του συστήματος  $a_{ij}$  και  $b_i$  δεν εξαρτώνται από το χρόνο τότε η (8) αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές.

#### 1.4 Επιλυσιμότητα ΣΔΕ ανώτερης τάξης

Με τον όρο επιλυσιμότητα για ένα σύστημα ΣΔΕ εννοούμε τη δυνατότητα εύρεσης αναλυτικής λύσης. Αν η λύση εκφράζεται με μια σειρά από πεπερασμένο αριθμό όρων οι οποίοι συμπεριλαμβάνουν τις συνήθεις πράξεις ή/και κλασσικές γνωστές πραγματικές συναρτήσεις (πχ.  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\log$  κλπ) τότε λέμε πως η λύση εκφράζεται σε **κλειστή μορφή**. Σε πολλές περιπτώσεις όμως οι αναλυτικές λύσεις μπορεί να δίνονται και στη μορφή μιας συγκλίνουσας σειράς. Αν οι ΣΔΕ από τις οποίες προκύπτουν οι λύσεις-σειρές έχουν ιδιαίτερη σημασία για πολλά επιστημονικά προβλήματα, τότε σε αρκετές περιπτώσεις είναι δυνατό να αποδώσουμε τις παραπάνω σειρές σε νέες ειδικές συναρτήσεις (special functions), όπως είναι για παράδειγμα οι ελλειπτικές συναρτήσεις, η συνάρτηση Bessel κλπ. Στο MATHEMATICA η DSolve δε δίνει λύσεις σε μορφή σειράς παρά μόνο λύσεις σε κλειστή μορφή ή λύσεις με ειδικές συναρτήσεις. Επίσης το MATHEMATICA δεν μπορεί να εντοπίσει ιδιόζουσες λύσεις. Οι δυνατότητες του έχουν ως εξής

- α) Λύνει κάθε διαφορική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης (ίσως εκτός κάποιων ειδικών περιπτώσεων)
- α) Λύνει κάθε τάξης γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές
- β) Μπορεί να λύσει τις περισσότερες περιπτώσεις γραμμικών συστημάτων 2<sup>ης</sup> τάξης (με συντελεστές συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ )
- γ) Μπορεί να λύσει κάποιες ειδικές μορφές μη-γραμμικών συστημάτων.

Οι παραπάνω περιορισμοί δεν οφείλονται εν γένει στην έλλειψη των κατάλληλων αλγορίθμων στο MATHEMATICA αλλά στην μη ύπαρξη αναλυτικών λύσεων.

- Ένα μη γραμμικό σύστημα τάξης  $n > 1$  γενικά δεν έχει αναλυτικές λύσεις.

*Παράδειγμα.* Αντί της γραμμικής εξίσωσης (4) θεωρούμε την επίσης γραμμική εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές  $d^2x/dt^2 - dx/dt + x \sin t = 0$ .

```
In[1]:= solution= DSolve[x''[t] - x'[t] + x[t] Sin[t] == 0, x, t]
```

```
Out[1]= DSolve[Sin[t] x[t] - x'[t] + x''[t] == 0, x, t]
```

Το MATHEMATICA δεν μπορεί να βρει τη λύση ενώ υπάρχει. Για τη μη γραμμική εξίσωση  $d^2x/dt^2 - dx/dt + x^3 \sin t = 0$

έχουμε

```
In[2]:= solution= DSolve[x''[t] - x'[t] + x[t]^3 Sin[t] == 0, x, t]
```

```
Out[2]= DSolve[Sin[t] x[t]^3 - x'[t] + x''[t] == 0, x, t]
```

Η αναλυτική λύση δεν μπορεί να βρεθεί γιατί δεν υπάρχει.

## 1.5 Βασικές έννοιες της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Έστω μια διαφορική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης, της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (9)$$

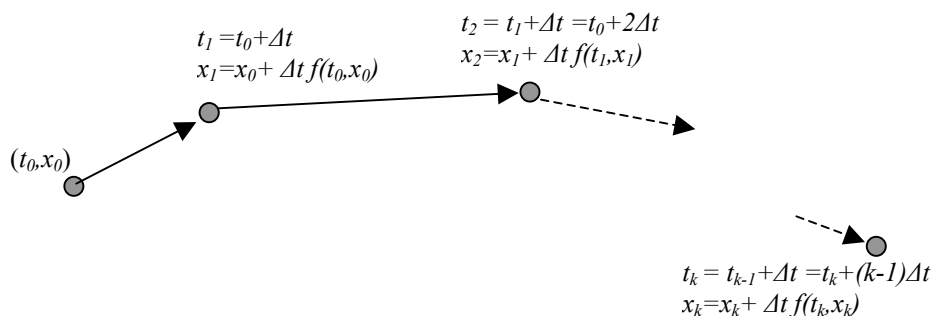
με άγνωστη συνάρτηση την  $x=x(t)$ . Η άμεση αριθμητική πληροφορία που μας παρέχει η (9) είναι η κλίση της συνάρτησης  $x(t)$ , δηλαδή η τιμή της  $f$  για κάθε  $t$  και  $x$ . Για το σημείο  $t=t_0$ ,  $x=x_0=x(t_0)$ , από τον ορισμό της παραγώγου, έχουμε την ακόλουθη προσέγγιση (**Προσέγγιση Euler**) :

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \approx \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad (\Delta t \ll 1) \quad (10)$$

ή

$$x(t_0 + \Delta t) \approx x_0 + \Delta t f(t_0, x_0) \quad (11)$$

Από την σχέση (11) προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε την τιμή  $x_0$  της άγνωστης συνάρτησης σε ένα σημείο  $t=t_0$  τότε μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά, σε ένα γειτονικό σημείο  $t_1=t_0+\Delta t$ , την τιμή της συνάρτησης  $x_1=x(t_1)$ . Ακολουθώντας, μια επαναληπτική διαδικασία, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παίρνουμε ένα σύνολο σημείων  $(t_k, x_k)$  τα οποία αποτελούν μια προσεγγιστική δειγματοληψία για την άγνωστη συνάρτηση  $x=x(t)$ .



**Σχήμα 1** Επαναληπτική διαδικασία προσέγγισης της λύσης

Για την πραγματοποίηση της παραπάνω επαναληπτικής διαδικασίας, απαιτείται η “γνώση” ενός αρχικού σημείου. Όμως, από οποιοδήποτε σημείο  $(x_0, y_0)$  και αν ξεκινήσουμε, η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία, και για όσο ορίζεται η συνάρτηση  $f(t, x)$  στο πραγματικό χώρο, θα μας δώσει ένα σύνολο σημείων

$$A(t_0, x_0) = \{ (t_k, x_k) \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, \dots, N \} \quad (12)$$

με **βήμα**  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$  (σταθερό). Το παραπάνω σύνολο, αφού προέρχεται από μια υπολογιστική διαδικασία, δεν μπορεί να είναι άπειρο, αλλά θα αναφέρεται πάντα σε ένα πεπερασμένο διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ .

Κάθε σημείο  $(t_0, x_0)$  αποτελεί μια αρχική συνθήκη, και για κάθε αρχική συνθήκη αντιστοιχεί μια μοναδική μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης<sup>1</sup>. Ουσιαστικά, δηλώνοντας, το αρχικό σημείο  $(t_0, x_0)$  ορίζουμε πλέον ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, που η λύση του  $x=x(t)$  δεν περιέχει αυθαίρετες σταθερές. Το σύνολο των σημείων (12) αποτελεί μια

<sup>1</sup> Θεωρούμε ότι, οι συνθήκες των θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας ικανοποιούνται.



προσεγγιστική αριθμητική παράσταση της μερικής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών και ονομάζεται **αριθμητική λύση** ενώ η επαναληπτική διαδικασία που ακολουθείται ονομάζεται **αριθμητική ολοκλήρωση**.

Η αναλυτική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, η οποία μπορεί να περιγράψει κάποιο φυσικό σύστημα, μας αποκαλύπτει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος, τα κρίσιμα και ουσιώδη σημεία του. Αντίθετα, ακολουθώντας μόνο την αριθμητική ολοκλήρωση, χωρίς κάποιες θεωρητικές ενδείξεις για την συμπεριφορά των λύσεων, γίνεται μια τυφλή εξερεύνηση του χώρου των αρχικών συνθηκών και μόνο για πεπερασμένα διαστήματα της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ . Η διάσταση του χώρου των αρχικών συνθηκών αυξάνεται με την τάξη της διαφορικής εξίσωσης ή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων και έτσι σε συστήματα μεγάλης τάξης, η πλήρης εξερεύνηση όλων των δυνατών εξελίξεων για το σύστημα είναι αδύνατη. Όμως η αριθμητική ολοκλήρωση είναι ένα απαραίτητο εργαλείο στα περισσότερα προβλήματα που περιγράφονται από ΣΔΕ αφού συνήθως δεν έχουν αναλυτικές λύσεις. Οι ΔΕ ( $n>1$ ) που λύνονται αναλυτικά αποτελούν εξαιρέσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε εκτενείς απλουστεύσεις κάποιου πολύπλοκου συστήματος. Για παράδειγμα η εξίσωση  $d^2x/dt^2 + k^2x = 0$  αποτελεί μια προσέγγιση για πάρα πολλά φυσικά προβλήματα που τα μελετούμε κοντά στα σημεία ισορροπίας του.

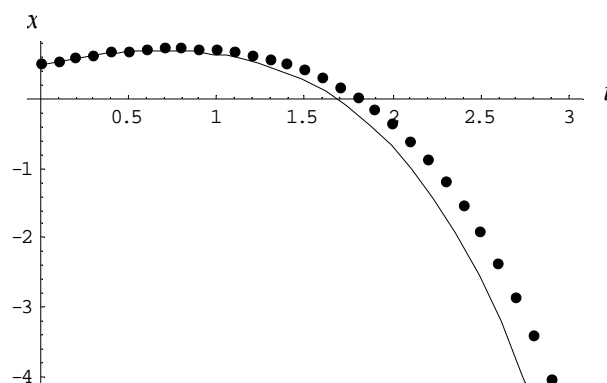
Μια αριθμητική λύση αποτελεί προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Θεωρούμε για παράδειγμα το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$dx/dt = -x + y, \quad x(0) = 1/2$$

με λύση την  $x = 1 + t - e^t/2$  η οποία παρουσιάζεται με τη συνεχή καμπύλη του σχήματος 2. Αν επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα αριθμητικά, με την διαδικασία που περιγράψαμε στο σχήμα 1, και με  $\Delta t = 0.1$ , θα πάρουμε την ακολουθία των σημείων  $(t, x)$

(0,0.5), (0.1,0.55), (0.2,0.595), κλπ

Τα σημεία αυτά παρουσιάζονται επίσης στο σχήμα 2 και αποτελούν την αριθμητική λύση.



**Σχήμα 2** Αναλυτική (συνεχής γραμμή) και αριθμητική λύση (σημεία)

Η αριθμητική λύση, ενώ αρχικά ακολουθεί σωστά την αναλυτική (πραγματική) λύση, στη συνέχεια παρουσιάζει μια αυξανόμενη απόκλιση. Η απόκλιση αυτή ονομάζεται **συστηματικό σφάλμα** της αριθμητικής μεθόδου και οφείλεται στο γεγονός ότι η παράγωγος  $dx/dt = f(t, x)$  στο διάστημα  $(t_k, t_{k+1})$ , θεωρήθηκε σταθερή και ίση με  $(x_{k+1} - x_k)/\Delta t$ . Μια καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να επιτευχθεί μειώνοντας το βήμα ολοκλήρωσης, γεγονός όμως που συνεπάγεται τις ακόλουθες επιπτώσεις:

- Απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός επαναλήψεων για την κάλυψη της ίδιας περιοχής  $(0, x_{max})$  και έτσι αυξάνεται η «πολυπλοκότητα» του αλγορίθμου και απαιτείται μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος (CPU time).

- Οι διάφορες ποσότητες αντιπροσωπεύονται με πραγματικούς αριθμούς πεπερασμένης ακρίβειας. Το λάθος ή η στρογγυλοποίηση του τελευταίου δεκαδικού μπορεί να προκαλεί αυξανόμενα σφάλματα μετά από κάθε επανάληψη. Έτσι όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, το **λάθος στρογγυλοποίησης** (*roundoff error*) μπορεί να γίνει πολύ σημαντικό.

Η μέθοδος Euler αποτελεί την πιο απλή μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η ανάπτυξη μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων αποτελεί αντικείμενο της **Αριθμητικής Ανάλυσης**. Βασικός στόχος, της αριθμητικής ανάλυσης, στο πεδίο αυτό, είναι η κατασκευή μεθόδων ολοκλήρωσης με τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά

α) Μικρότερα και ελεγχόμενα σφάλματα

β) Μικρότερη πολυπλοκότητα, δηλαδή λιγότερες επαναλήψεις και, γενικά, λιγότερες αριθμητικές πράξεις

γ) Εύκολη και αποδοτική προσαρμογή της μεθόδου για όσο το δυνατό περισσότερες κατηγορίες ΣΔΕ.

Οι πιο γνωστές, σήμερα μέθοδοι, είναι οι Runge-Kutta, Adams, Bulirsch-Stoer κ.α. [11][12]

## 1.6 Επίλυση ΣΔΕ και συστημάτων ΣΔΕ με την NDSolve

Όπως τονίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, μια αριθμητική λύση αναφέρεται στη λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών και για ένα πεπερασμένο διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής (*διάστημα ολοκλήρωσης*). Η αριθμητική επίλυση στο *MATHEMATICA* γίνεται με την εντολή *NDSolve*, η οποία συντάσσεται όπως και η *DSolve* (για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών) αλλά μαζί με την δήλωση της ανεξάρτητης μεταβλητής δηλώνεται και το διάστημα ολοκλήρωσης

*NDSolve[Πρόβλημα Αρχικών τιμών, Άγνωστη συνάρτηση, Ανεξ. Μεταβλητή&Διάστημα Ολοκλήρωσης]*

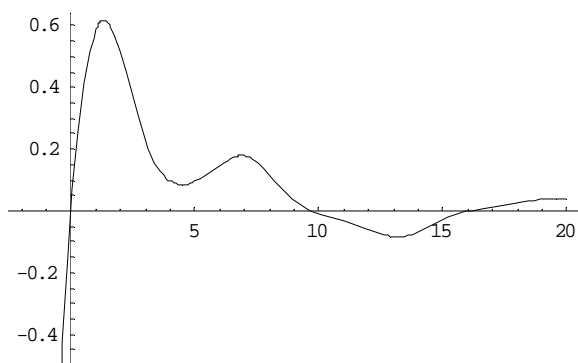
<b><i>NDSolve[{ΣΔΕ, Αρχικές συνθήκες}, x, {t, tmin, tmax}]</i></b>
--------------------------------------------------------------------

Το αποτέλεσμα της *NDSolve* δίνεται σαν μια «*συνάρτηση παρεμβολής*» (*Interpolating function*) του *MATHEMATICA* μέσω της οποίας μπορούμε να πάρουμε τα παραπάνω ζεύγη τιμών για οποιοδήποτε *t* στο διάστημα (*tmin, tmax*).

Θεωρούμε τη ΣΔΕ  $d^2x/dt^2 + dx/dt + x\sin t = 0$  και τις αρχικές συνθήκες  $x(0)=0, x'(0)=1$ . Στον παρακάτω κώδικα επιλύουμε αριθμητικά την παραπάνω εξίσωση. Η συνάρτηση παρεμβολής που προκύπτει ανατίθεται στο σύμβολο *x* το οποίο αποτελεί στη συνέχεια την συνάρτηση της λύσης, μέσω της οποίας μπορούμε να πάρουμε τις τιμές αυτής ή και των παραγώγων της σε συγκεκριμένα σημεία.

```
In[1]:= Clear["Global`*"];
solution = NDSolve[{x''[t] + x'[t] + x[t] Sin[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 1}, x, {t, -2, 20}]
x = x /. solution[[1]];
Plot[x[t], {t, -2, 20}]
```

```
Out[2]= {{x→ InterpolatingFunction[{{-2., 20.}}, <>]}}
```



```
Out[4]= - Graphics -
```

```
In[5]:= Print["Για t=10 , x(10)=", x[10]]
        Print["και με παράγωγο x'(10)=", x'[10]]

Για t=10 , x(10)=-0.00962113
και με παράγωγο x'(10)=-0.0262346
```

## 1.7 Επιλογές και έλεγχος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Η `NDSolve` χρησιμοποιεί κλασσικές μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης (πχ Runge-Kutta, Adam, Gear) . Οι παραπάνω μέθοδοι χρησιμοποιούν παραμέτρους οι οποίες καθορίζονται αυτόματα από την `NDSolve`. Υπάρχουν όμως και μερικές βασικές παράμετροι οι οποίες μπορούν να αλλάξουν με βάση τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος. Έτσι, συνολικά, η `NDSolve` συντάσσεται ως εξής

**`NDSolve`**[equations, {y<sub>1</sub>,y<sub>2</sub>,...},{x,xmin,xmax}, *Επιλογή1*→ *Νέα Τιμή*, *Επιλογή2*→ *Νέα Τιμή* κ.λ.π., ]

Οι διαθέσιμες Επιλογές και η χρήση τους είναι οι ακόλουθες

### 1. **Method** (Προεπιλεγμένη τιμή `Automatic`)

Επιλέγουμε ποια αριθμητική μέθοδο θα χρησιμοποιήσει η `NDSolve`, πχ `Method`→ `RungeKutta`. Με την επιλογή `Automatic` το *MATHEMATICA* εναλλάσσει τις μεθόδους *Adams* και *Gear*, ανάλογα με τη συμπεριφορά της λύσης, για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας.

### 2. **WorkingPrecision** ( Προεπιλεγμένη τιμή `$MachinePrecision`)

Είναι ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται κατά τους εσωτερικούς υπολογισμούς. Οι σημερινοί προσωπικοί υπολογιστές εκτελούν επεξεργασία στα 32-bit η οποία παρέχει τους πραγματικούς αριθμούς με ακρίβεια 16 σημαντικών ψηφίων (`$MachinePrecision`). Αν θέσουμε `WorkingPrecision`<`$MachinePrecision` τότε δεν λαμβάνεται υπόψη η νέα τιμή που δώσαμε. Αν θέσουμε `WorkingPrecision`>`$MachinePrecision`, τότε οι πράξεις γίνονται με κώδικες «αυθαίρετης ακρίβειας» (`arbitrary precision`), μειώνονται τα σφάλματα στρογγυλοποίησης αλλά η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνει ραγδαία.

### 3. **AccuracyGoal** και **PrecisionGoal** (Προεπιλεγμένη τιμή=6)

Καθορίζουν το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα της λύσης, αντίστοιχα, για το κάθε βήμα ολοκλήρωσης και εκφράζονται με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που επιθυμούμε. Η `NDSolve` σταματάει τις εσωτερικές επαναλήψεις αν επιτευχθεί **έστω η μία** από τις παραπάνω συνθήκες. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι τιμές `AccuracyGoal` και `PrecisionGoal` δεν

εκφράζουν το πραγματικό σφάλμα μετά το τέλος της ολοκλήρωσης, αλλά σχετίζονται με το σφάλμα για το κάθε βήμα.

#### 4. **MaxSteps** (Προεπιλεγμένη τιμή=1000)

Κατά την αριθμητική ολοκλήρωση με την **NDSolve**, αποθηκεύονται στη μνήμη οι τιμές της λύσης ανά διαστήματα με βήμα  $\Delta t$  της ανεξάρτητης μεταβλητής και κατασκευάζεται από αυτά η συνάρτηση παρεμβολής. Η τιμή **MaxSteps** καθορίζει το μέγιστο αριθμό βημάτων που επιτρέπουμε να παράξει η **NDSolve**. Η αύξηση του **MaxStep** σημαίνει παραγωγή περισσότερων σημείων και συνεπώς μεγαλύτερες απαιτήσεις σε μνήμη. Η επιλογή **MaxSteps**  $\rightarrow \infty$ , επιτρέπει στο **MATHEMATICA** να χρησιμοποιήσει όσα βήματα χρειάζονται για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

#### 5. **StartingStepSize** (Προεπιλεγμένη τιμή=Automatic) και **MaxStepSize**

(Προεπιλεγμένη τιμή= $\infty$ ):

Το **StartingStepSize** είναι το βήμα  $\Delta t$  με το οποίο ξεκινάει η ολοκλήρωση. Με την επιλογή **MaxStepSize** δηλώνουμε έναν περιορισμό για την μέγιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το βήμα ολοκλήρωσης.

#### 6. **InterpolationPrecision** (Προεπιλεγμένη τιμή =WorkingPrecision)

Αναφέρεται στην ακρίβεια των ψηφίων που επιστρέφει η συνάρτηση παρεμβολής που εκφράζει τη λύση. Δεν σχετίζεται με την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

**7. Compiled** (Προεπιλεγμένη τιμή=True) : Με την τιμή **True**, οι εξισώσεις και η μέθοδος αριθμητικής επίλυσης μετατρέπονται σε κώδικα μηχανής (μέσω compiler της C).

Παράδειγμα. Στην αριθμητική επίλυση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών για το διάστημα  $t \in (0, 100)$ , έχουμε

```
In[4]:= NDSolve[{x''[t] + x'[t] + x[t] Sin[5 t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 1}, x, {t, 0, 100}]
NDSolve::mxst : Maximum number of 1000 steps reached at the point t == 51.53886450328256`.
Out[4]= {{x -> InterpolatingFunction[{{0., 51.5389}}, <>]}}
```

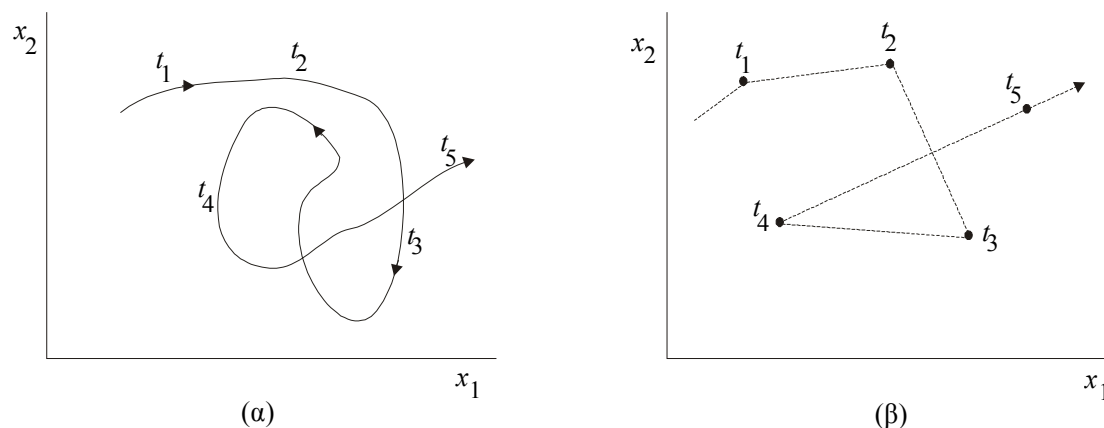
Το μήνυμα δηλώνει ότι για την προεπιλεγόμενη τιμή **MaxSteps**=1000, η ολοκλήρωση επιτεύχθηκε μόνο μέχρι την τιμή  $t=51.538\dots$ . Για να γίνει η ολοκλήρωση μέχρι το  $t=100$  απαιτείται αύξηση της τιμής του **MaxSteps**.

```
In[5]:= NDSolve[{x''[t] + x'[t] + x[t] Sin[5 t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 1}, x, {t, 0, 100},
MaxSteps -> 2000]
Out[5]= {{x -> InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>]}}
```

**Κεφάλαιο 2ο.****Εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα****2.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί**

Ένα δυναμικό σύστημα αποτελεί γενικά ένα αιτιοκρατικό μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιγράφει την κατάσταση ενός συστήματος καθώς εξελίσσεται στο χρόνο. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από ένα πεπερασμένο αριθμό ανεξάρτητων μετρήσιμων ποσοτήτων  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ . Η γνώση των  $x_i$  σε κάποια χρονική στιγμή  $t$  μας επιτρέπει να εξάγουμε κάθε απαραίτητη πληροφορία για την στιγμιαία κατάσταση του συστήματος και να ορίσουμε με σαφήνεια τον κανόνα που θα μας επιτρέψει την εύρεση της κατάστασης του συστήματος (δηλαδή των ποσοτήτων  $x_i$ ) τη στιγμή  $t+\Delta t$ . Κατά την εξέλιξη λοιπόν ενός δυναμικού συστήματος οι ποσότητες  $x_i$  αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου και ονομάζονται **μεταβλητές** του συστήματος. Ο αριθμός  $n$  των μεταβλητών ορίζει τη **διάσταση** του συστήματος ενώ ο  $n$ -διάστατος χώρος μέσα στον οποίο αντιπροσωπεύονται τα διανύσματα-θέσεις  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ονομάζεται **χώρος καταστάσεων** (configuration space). Ο χρόνος  $t$  μπορεί να είναι μια συνεχής μεταβλητή ( $t \in \mathbb{R}$ ) ή να παίρνει διακριτές τιμές  $t=t_k=k \Delta t$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ . Στην πρώτη περίπτωση το δυναμικό σύστημα ονομάζεται **συνεχές** ενώ στη δεύτερη **διακριτό**.

Σε ένα συνεχές σύστημα τα  $x_i(t)$  αποτελούν συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου και η  $t$ -παραμετρική καμπύλη  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  αποτελεί μια συνεχή καμπύλη μέσα στο χώρο καταστάσεων, με συγκεκριμένη φορά διαγραφής, που ονομάζεται **τροχιά** (trajectory). Σε ένα διακριτό σύστημα σαν τροχιά του συστήματος ορίζεται το αριθμησιμο σύνολο σημείων  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  όπου  $x_i^{(k)} = x_i(t_k) \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



**Σχήμα 1** Φασική τροχιά α) συνεχούς συστήματος β) διακριτού συστήματος. Στο συνεχές σύστημα για κάθε  $t$  αντιστοιχεί κάποια κατάσταση ενώ για το διακριτό σύστημα η καταστασή του ορίζεται μόνο τις χρονικές στιγμές  $t_k$ . Η φορά της τροχιάς και στις δύο περιπτώσεις ορίζεται από τον τρόπο διαγραφής της καθώς αυξάνεται ο χρόνος.

**2.2 Συνεχή Δυναμικά συστήματα με Διαφορικές εξισώσεις**

Ένα συνεχές δυναμικό σύστημα ή μια ροή (flow) διάστασης  $n$  ορίζεται εν γένει μέσω ενός συστήματος  $n$  διαφορικών εξισώσεων  $1^{\text{ης}}$  τάξης

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{13}$$

το οποίο γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τα δεξιά μέλη των εξισώσεων ορίζουν το **διανυσματικό πεδίο** του συστήματος  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ . Μία συγκεκριμένη (μερική) λύση του συστήματος (13) προκύπτει θεωρώντας αρχικές συνθήκες οι οποίες εκφράζουν την κατάσταση του συστήματος σε μια χρονική στιγμή  $t=t_0$ , δηλαδή θεωρώντας

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad x_{i0} \in D \subset \mathbb{R}^n\tag{14}$$

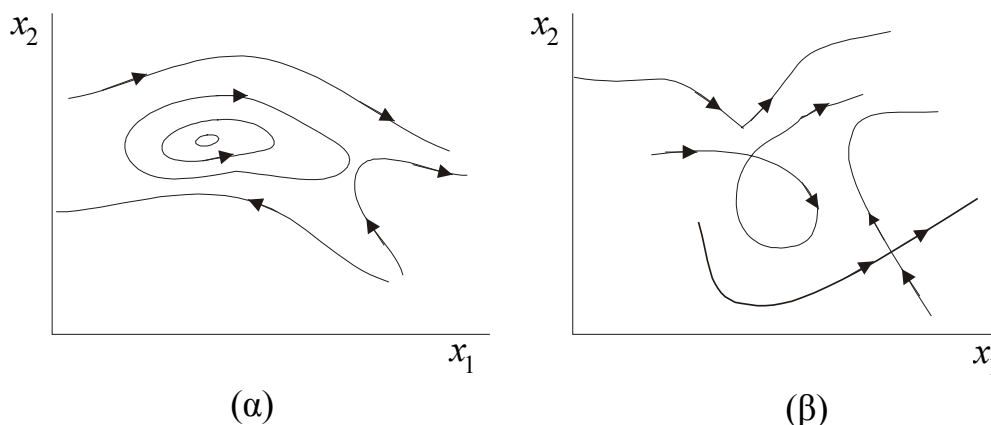
Επιδύναμιζοντας το πρόβλημα αρχικών τιμών (13)-(14) παίρνουμε τη λύση  $x_i = x_i(t; x_0, t_0)$  η οποία μας δίνει την εξέλιξη του συστήματος στον χρόνο (προς το μέλλον για  $t > t_0$  και προς το παρελθόν για  $t < t_0$ ).

Στα επόμενα θα θεωρούμε πάντα ότι οι συναρτήσεις  $f_i$  ορίζονται πάντα σε ένα ανοιχτό υποσύνολο  $D^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\}$  του  $\mathbb{R}^{n+1}$  που ονομάζεται συχνά **εκτεταμένος χώρος φάσεων** (extended phase space). Επίσης μέσα στο  $D^+$  οι  $f_i$  είναι συνεχείς και οι παράγωγοι  $\partial f_i / \partial x_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  ορίζονται και είναι επίσης συνεχείς. Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις εξασφαλίζεται η **ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων** του συστήματος αρχικών τιμών. Για κάθε σύνολο αρχικών τιμών, και για δεδομένη αρχική τιμή του χρόνου  $t=t_0$  υπάρχει μία και μοναδική λύση που αντιστοιχεί σε αυτές. Τα σημεία  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \in D^+$ , που προκύπτουν από την μοναδική λύση, ορίζουν μία συνεχή καμπύλη μέσα στον  $D^+$  που ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη**. Η ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων μας εξασφαλίζει ότι

- Από κάθε σημείο του επεκταμένου χώρου των φάσεων περνάει μία και μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη. Δηλαδή, η εξέλιξη του συστήματος είναι προκαθορισμένη αν οριστεί πλήρως η κατάστασή του σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Αν τα δεξιά μέλη των εξισώσεων του συστήματος (13) δεν περιέχουν το χρόνο ( $\partial f_i / \partial t = 0$ ,  $i=1, \dots, n$ ) το σύστημα ονομάζεται **αυτόνομο**. Στην περίπτωση αυτή, το διανυσματικό πεδίο του συστήματος είναι σταθερό στο χώρο καταστάσεων ο οποίος καλείται και **χώρος των φάσεων**. Μια αρχική θέση  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  του συστήματος στο χώρο των φάσεων, ανεξάρτητα από την χρονική στιγμή στη οποία αναφέρεται, καθορίζει πλήρως το διάλυμα  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  το οποίο καθορίζει την διεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί το σύστημα. Η τροχιά (ή αλλιώς **φασική καμπύλη**), η οποία θα διαγραφεί, οφείλει να είναι πάντα εφαιπόμενη στο διανυσματικό πεδίο και θα εξαρτάται αποκλειστικά μόνο από την αρχική θέση του συστήματος. Η αρχή του χρόνου μπορεί να οριστεί αυθαίρετα και, γενικά, θέτουμε  $t_0=0$ . Λόγω της μοναδικότητας των λύσεων, και με εξαίρεση τα σημεία ισορροπίας (βλ. παράγραφο 2.4) συμπεραίνουμε τα ακόλουθα

- Από κάθε σημείο του χώρου των φάσεων περνάει μία μοναδική τροχιά για  $t \in (-\infty, \infty)$ .
- Μία τροχιά δεν μπορεί να τέμνει εγκάρσια τον εαυτό της.



**Σχήμα 2** α) Φασικό πορτραίτο αυτόνομου δισδιάστατου συστήματος β) μη επιτρεπτές τροχιές για  $t \in [t_0, t_1]$  (τεμνόμενες, τέμνουσα τον εαυτό της, μη παραγωγίσιμη)

Το σύνολο όλων των τροχιών ή φασικών καμπύλων ονομάζεται **φασικό διάγραμμα** (ή πορτρέτο). Η κατανομή και η ποιοτική μορφή των τροχιών στο φασικό χώρο δημιουργούν μια «τοπολογική εικόνα» η οποία είναι χαρακτηριστική για το σύστημα. Μόνο στην περίπτωση ενός συστήματος 2 διαστάσεων έχουμε άμεση εποπτεία του φασικού χώρου. Στις τρεις διαστάσεις ο φασικός χώρος προβάλλεται ουσιαστικά στο επίπεδο και η κατανόησή του γίνεται δυσχερής.

### 2.3 Τροχιές και ποιοτική κατηγοριοποίηση

Όπως αναφέραμε παραπάνω μία τροχιά περιγράφεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$x_1 = x_1(t; x_{i0}, t_0), \quad x_2 = x_2(t; x_{i0}, t_0), \quad \dots \quad x_n = x_n(t; x_{i0}, t_0) \quad (15)$$

οι οποίες προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (13) με αρχικές συνθήκες  $x(t_0) = x_{i0}$ . Αν οι σχέσεις (15) βρίσκονται αναλυτικά και μπορέσουμε να απαλείψουμε το χρόνο  $t$ , τότε περιγράφουμε την τροχιά με αναλυτικό τρόπο, συνήθως σαν τομή επιφανειών. Για τα αυτόνομα συστήματα οι τροχιές μπορούν να προκύψουν από την λύση του «συμμετρικού» συστήματος

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)} \quad (16)$$

Στην Υπολογιστική Δυναμική, όπου γίνεται χρήση του συμβολικού ή κλασσικού προγραμματισμού, οι τροχιές περιγράφονται γενικά με την παραμετρική μορφή (15) για τους παρακάτω λόγους

1. Οι σχέσεις (15) είναι άμεσα διαθέσιμες είτε από την αναλυτική είτε από την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.
2. Οι διαφορικές εξισώσεις εν γένει δεν λύνονται ή δίνονται από πολύπλοκες συναρτήσεις και η απαλοιφή του χρόνου δεν είναι πρακτικά εφικτή.
3. Ο συμβολικός προγραμματισμός δεν μπορεί να διαχειριστεί, προς το παρόν, άμεσα εξισώσεις της μορφής (16) ή, γενικότερα, δεν μπορεί να βρει τα ολοκληρώματα των διαφορικών εξισώσεων (αν υπάρχουν) από τα οποία προκύπτει μια αναλυτική περιγραφή των τροχιών.

Μια τροχιά της μορφής (15) θα ονομάζεται **περιοδική** αν υπάρχει ένα  $T$  τέτοιο ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να ισχύει

$$x_i(t+T; x_{j0}, t_0) = x_i(t; x_{j0}, t_0) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (17)$$

Το  $T$  ονομάζεται **περίοδος** της τροχιάς και δηλώνει ένα τακτό χρονικό διάστημα στο οποίο το σύστημα επανέρχεται ξανά στην αρχική του θέση στο χώρο των φάσεων. Οι περιοδικές

τροχιές συχνά ονομάζονται *κύκλοι* (cycles) γιατί είναι τοπολογικά ισοδύναμες με έναν γεωμετρικό κύκλο.

Μια τροχιά της μορφής (15) θα ονομάζεται **περατωμένη** αν εξελίσσεται σε ένα φραγμένο υποσύνολο του φασικού χώρου, δηλαδή υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε

$$|x_i(t; x_{j0}, t_0)| < M \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Προφανώς, μια περιοδική τροχιά είναι περατωμένη αλλά δεν ισχύει αναγκαστικά το αντίθετο. Αν

$$\exists i \in [1, \dots, n], \quad x_i(t; x_{j0}, t_0) \rightarrow \pm\infty \quad \text{για } t \rightarrow +\infty \text{ και } -\infty$$

η τροχιά ονομάζεται ανοιχτή. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε ημι-περατωμένες ή ημι-ανοιχτές τροχιές οι οποίες είναι περατωμένες για  $t \rightarrow +\infty$  και ανοιχτές για  $t \rightarrow -\infty$  (ή το αντίστροφο). Αν υπάρχει σημείο  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  του χώρου φάσεων, τέτοιο ώστε

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t; x_{j0}, t_0) = x_i^* \quad \eta' \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_i(t; x_{j0}, t_0) = x_i^*,$$

η τροχιά ονομάζεται **ασυμπτωτική**. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα τείνει προς μια σταθερή κατάσταση ή προέρχεται από μια συγκεκριμένη κατάσταση. Η έννοια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς έχει και γενικότερη έννοια αν αντί του σημείου  $\mathbf{x}^*$  ορίσουμε ένα υποσύνολο  $U^*$  του χώρου φάσεων με διάσταση  $0 < m < n$  προς το οποίο τείνει η τροχιά.

Στο MATHEMATICA ο υπολογισμός των τροχιών γίνεται με την αναλυτική ή αριθμητική επίλυση του συστήματος. Οι δυναμικές μεταβλητές  $x_i$  μπορούν πάντοτε να παρασταθούν σε ένα διάγραμμα  $t$ - $x_i$  για κάθε μία ξεχωριστά. Αντίθετα οι φασικές τροχιές μπορούν να παρασταθούν γραφικά μόνο για συστήματα 2 και 3 διαστάσεων. Είναι δυνατή όμως η προβολή των τροχιών σε επίπεδα  $x_i$ - $x_j$ . Η ολοκλήρωση, διαχείριση και παράσταση των τροχιών παρουσιάζεται με τα παρακάτω παραδείγματα.

### Παράδειγμα 2-1

Για το αυτόνομο δυναμικό σύστημα  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -k^2 x_1$  με αρχικές συνθήκες

$x_1(0) = x_{10}$  και  $x_2(0) = x_{20}$  παίρνουμε την παρακάτω γενική λύση :

```

In[1]:= deq1 = x1'[t] == x2[t]; deq2 = x2'[t] == -k^2 x1[t]; (* Εξισώσεις Δυναμικού συστήματος*)
sol = DSolve[{deq1, deq2, x1[0] == x10, x2[0] == x20}, {x1[t], x2[t]}, t] // FullSimplify;
x1t = x1[t] /. sol[[1]]; x2t = x2[t] /. sol[[1]];
Print["Γενική Λύση x1(t)=", x1t, "      x2(t)=", x2t]

```

$$\text{Γενική Λύση } x_1(t) = x_{10} \cos[kt] + \frac{x_{20} \sin[kt]}{k} \quad x_2(t) = x_{20} \cos[kt] - k x_{10} \sin[kt]$$

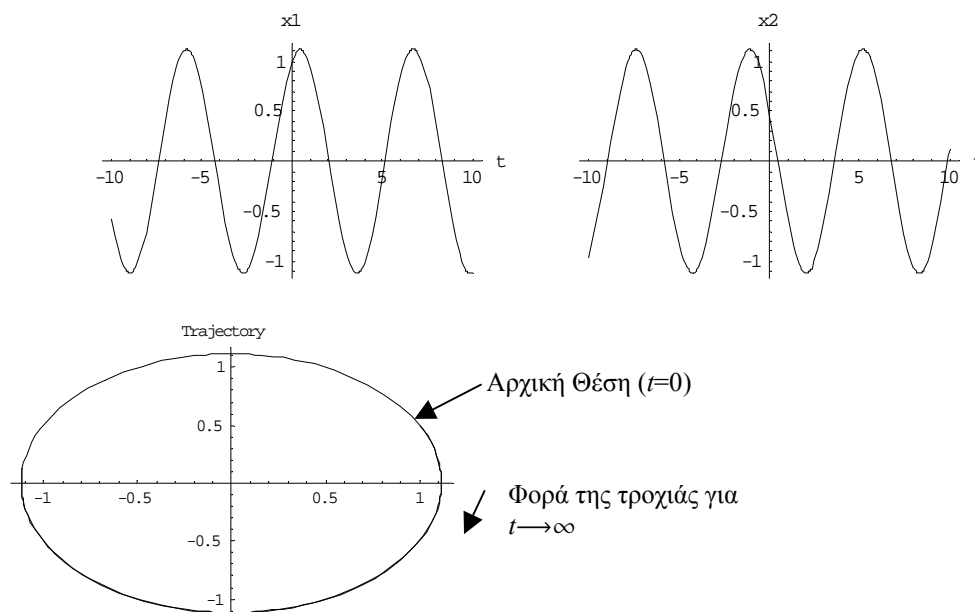
Όλες οι τροχιές του συστήματος είναι γνωστές μέσω της γενικής λύσης. Η εξέλιξη των  $x_1 = x_1(t)$  και  $x_2 = x_2(t)$  καθώς και οι τροχιές  $(x_1(t), x_2(t))$  μπορούν να παρασταθούν γραφικά θεωρώντας συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες και συγκεκριμένη τιμή για την παράμετρο  $k$  του συστήματος. Για παράδειγμα για  $k=1$ ,  $x_{10}=1$ ,  $x_{20}=0.5$  θα έχουμε

```

In[4]:= (* Μερικές λύσεις για k=1, x10=1, x20=0.5*)
x1ta = x1t /. {k -> 1, x10 -> 1, x20 -> 0.5};
x2ta = x2t /. {k -> 1, x10 -> 1, x20 -> 0.5};
(*Εξέλιξη των μεταβλητών x1, x2 στο διάστημα -10<t<10*)
graph1 = Plot[x1ta, {t, -10, 10}, AxesLabel -> {"t", "x1"}, DisplayFunction -> Identity];
graph2 = Plot[x2ta, {t, -10, 10}, AxesLabel -> {"t", "x2"}, DisplayFunction -> Identity];
Show[GraphicsArray[{graph1, graph2}], DisplayFunction -> $DisplayFunction]
(* Τροχιά - Φασική καμπύλη *)
ParametricPlot[{x1ta, x2ta}, {t, 0, 10}, PlotLabel -> "Trajectory"]

```

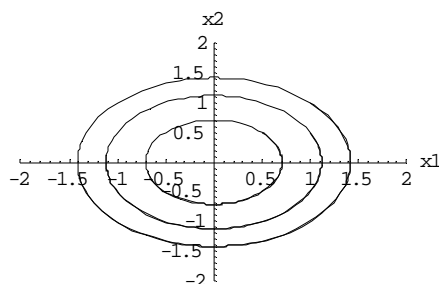




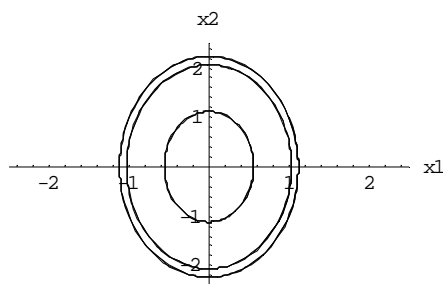
Θέτοντας διαφορετικές τιμές αρχικών συνθηκών και διατηρώντας σταθερή την παράμετρο  $k$  θα πάρουμε άλλες τροχιές του συστήματος και η ταυτόχρονη γραφική τους παράσταση θα μας δώσει το φασικό πορτρέτο του συστήματος. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η μεταβολή της παραμέτρου  $k$  σημαίνει ουσιαστικά μεταβολή του συστήματος. Έτσι, γενικά, για κάθε τιμή των παραμέτρων ενός συστήματος αντιστοιχεί και ένα διαφορετικό φασικό πορτρέτο.

```
In[10]:= (* Μερικές λύσεις για k=1, και διάφορα x10, x20*)
x1ta = x1t /. {k -> 1, x10 -> 1, x20 -> 0.5}; x2ta = x2t /. {k -> 1, x10 -> 1, x20 -> 0.5};
x1tb = x1t /. {k -> 1, x10 -> 0.5, x20 -> 0.5}; x2tb = x2t /. {k -> 1, x10 -> 0.5, x20 -> 0.5};
x1tc = x1t /. {k -> 1, x10 -> 1, x20 -> 1}; x2tc = x2t /. {k -> 1, x10 -> 1, x20 -> 1};
(*Show[GraphicsArray[{graph1, graph2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction] *)
phase1 = ParametricPlot[{x1ta, x2ta}, {x1tb, x2tb}, {x1tc, x2tc}], {t, 0, 10},
  AxesLabel -> {"x1", "x2"}, PlotRange -> {-2.5, 2.5}, DisplayFunction -> Identity];
(* Μερικές λύσεις για k=2, και διάφορα x10, x20*)
x1ta = x1t /. {k -> 2, x10 -> 1, x20 -> 0.5}; x2ta = x2t /. {k -> 2, x10 -> 1, x20 -> 0.5};
x1tb = x1t /. {k -> 2, x10 -> 0.5, x20 -> 0.5}; x2tb = x2t /. {k -> 2, x10 -> 0.5, x20 -> 0.5};
x1tc = x1t /. {k -> 2, x10 -> 1, x20 -> 1}; x2tc = x2t /. {k -> 2, x10 -> 1, x20 -> 1};
phase2 = ParametricPlot[{x1ta, x2ta}, {x1tb, x2tb}, {x1tc, x2tc}], {t, 0, 10},
  AxesLabel -> {"x1", "x2"}, PlotRange -> {-2.5, 2.5}, DisplayFunction -> Identity];
Print["Phase Portrait for k=1", "Phase Portrait for k=2"]
Show[GraphicsArray[{phase1, phase2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]]
```

Phase Portrait for k=1



Phase Portrait for k=2



Παρατηρούμε από τα παραπάνω φασικά πορτρέτα ότι οι τροχιές είναι όλες ελλείψεις (ή κύκλοι για  $k=1$ ) με εκκεντρότητα που εξαρτάται μόνο από το  $k$  (δηλαδή την αλλαγή του συστήματος). Σύμφωνα με την σχέση (16) με αυτά που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, οι εξισώσεις των φασικών τροχιών μπορούν να προκύψουν από το σύστημα

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-k^2 x_1} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -k^2 \frac{x_1}{x_2}$$

Πράγματι, επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση θεωρώντας την  $x_2$  ως την άγνωστη συνάρτηση, την  $x_1$  ως την ανεξάρτητη μεταβλητή και αρχική συνθήκη την  $x_2(x_{10})=x_{20}$ , έχουμε

`In[20]:= DSolve[{x2'[x1] == -k^2 x1/x2[x1], x2[x10] == x20}, x2[x1], x1] // FullSimplify`

`Out[20]= {{x2[x1] -> -sqrt(k^2 (-x1^2 + x10^2) + x20^2)}, {x2[x1] -> sqrt(k^2 (-x1^2 + x10^2) + x20^2)}}`

δηλαδή

$$x_2^2 + k^2 x_1^2 = x_{20}^2 + k^2 x_{10}^2 = \text{σταθ.} \quad (18)$$

Με την αναλυτική λύση (18) αποδεικνύεται ότι όλες οι τροχιές του συστήματος είναι ελλείψεις με κέντρο το (0,0). Από τα παραπάνω φασικά πορτρέτα που πήραμε υπολογιστικά έχουμε μόνο ενδείξεις για το ότι και οι υπόλοιπες τροχιές, εκτός των τριών ενδεικτικών, είναι επίσης ελλείψεις.

Το δυναμικό σύστημα του παραπάνω παραδείγματος είναι το γνωστό για τη Φυσική σύστημα του *αρμονικού ταλαντωτή*. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3, έχει ιδιαίτερη σημασία για την μελέτη πιο πολύπλοκων δυναμικών συστημάτων. Επειδή ο αρμονικός ταλαντωτής έχει γνωστή και απλή γενική λύση, χρησιμοποιήθηκε η αναλυτική επίλυση με την εντολή `DSolve` και οι τροχιές υπολογίστηκαν στηριζόμενοι σε αυτή.

*Άσκηση 2.1.* Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα μελετήστε την εξέλιξη του συστήματος  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = k^2 x_1$ . Δείξτε ότι οι τροχιές είναι ανοιχτές και συγκεκριμένα υπερβολές.

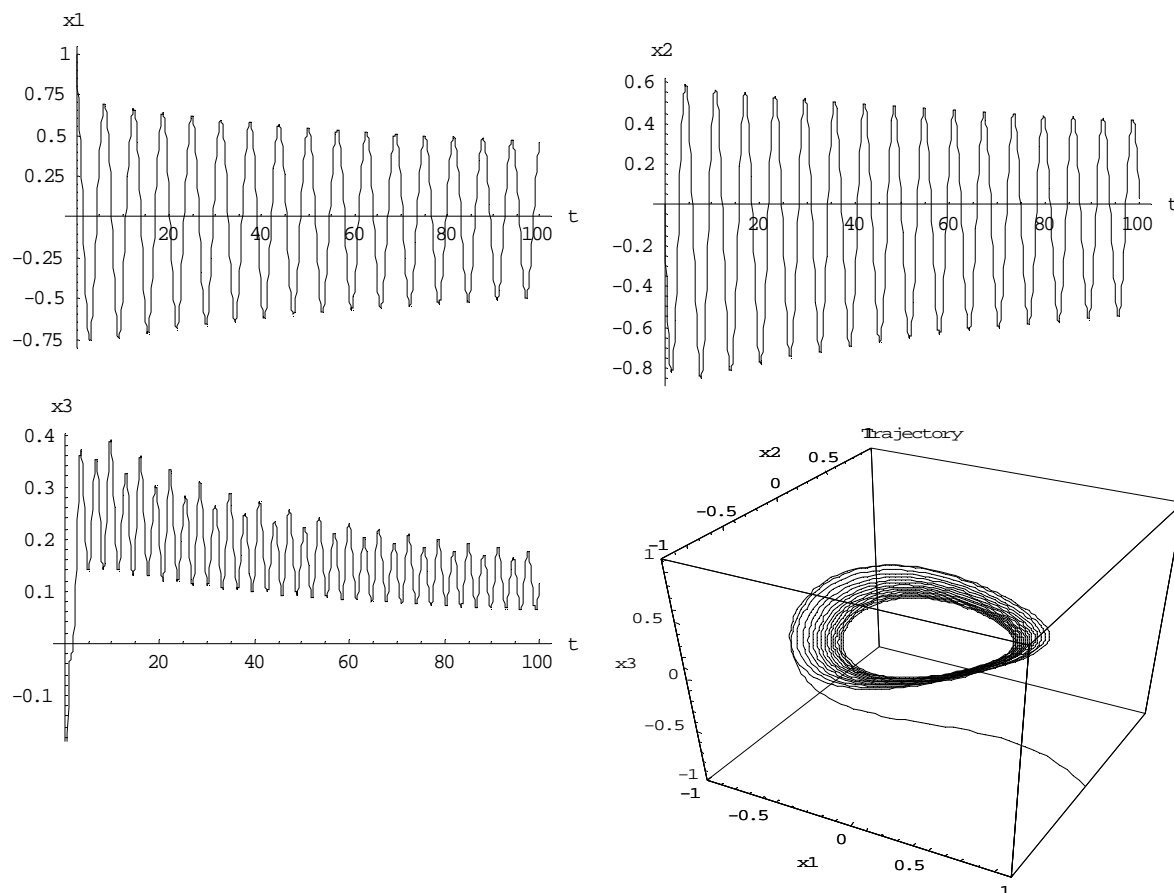
### Παράδειγμα 2-2.

Έστω το αυτόνομο σύστημα 3 διαστάσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad \dot{x}_3 = -x_3 + x_1^2$$

Το σύστημα είναι μη γραμμικό λόγω του όρου  $x_1^2$  στην τρίτη εξίσωση και δεν μπορεί να βρεθεί η γενική του λύση. Η εξέλιξη του συστήματος πρέπει να βρεθεί με αριθμητική λύση του συστήματος επιλέγοντας κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες  $x_1(0)=x_{10}$ ,  $x_2(0)=x_{20}$ ,  $x_3(0)=x_{30}$  καθώς και συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης  $(0, t_{\max})$ .

```
In[1]:= deq1 = x1'[t] == x2[t] + 0.5*x3[t];
deq2 = x2'[t] == -x1[t];
deq3 = x3'[t] == -x3[t] + x1[t]^2;
x10 = 1; x20 = 0; x30 = -1; tmax = 100;
sol = NDSolve[{deq1, deq2, deq3, x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30},
{x1, x2, x3}, {t, 0, tmax}]
x1t = x1[t] /. sol[[1]]; x2t = x2[t] /. sol[[1]]; x3t = x3[t] /. sol[[1]];
Plot[x1t, {t, 0, tmax}, PlotPoints -> 1000, AxesLabel -> {"t", "x1"}]
Plot[x2t, {t, 0, tmax}, PlotPoints -> 1000, AxesLabel -> {"t", "x2"}]
Plot[x3t, {t, 0, tmax}, PlotPoints -> 1000, AxesLabel -> {"t", "x3"}]
ParametricPlot3D[{x1t, x2t, x3t}, {t, 0, tmax}, AxesLabel -> {"x1", "x2", "x3"},
PlotLabel -> "Trajectory", PlotPoints -> 2000, PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-1, 1}}]
```



Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεταβλητές του συστήματος φαίνεται να ταλαντώνονται με μειούμενο σταδιακά πλάτος το οποίο τείνει ασυμπτωτικά προς κάποια σταθερή τιμή. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται από την αντίστοιχη φασική τροχιά με τη περιέλιξή της που καταλήγει τελικά γύρω από μία κλειστή καμπύλη (οριακός κύκλος) του τρισδιάστατου φασικού χώρου. Η τροχιά δεν τέμνει τον εαυτό της, αφού το σύστημα είναι αυτόνομο. Η εξέλιξη αυτή του συστήματος αναφέρεται στις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Ξεκινώντας το σύστημα από κάποια άλλη θέση η συμπεριφορά του μπορεί να είναι τελείως διαφορετική. Η εποπτεία του φασικού πορτρέτου, δηλαδή η παράσταση πολλών τροχιών στον τρισδιάστατο φασικό χώρο, δεν είναι πρακτικά ωφέλιμη.

**Άσκηση 2.2.** Για το σύστημα του Lorenz

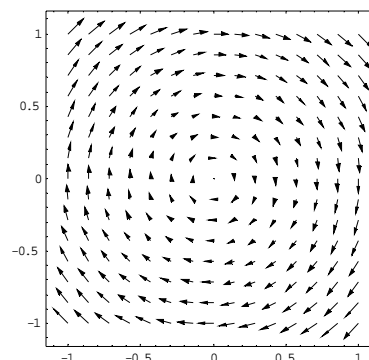
$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = 10x_1 - x_2 - x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1x_2 - 3x_3$$

και για αρχικές συνθήκες  $x_1=x_2=x_3=5.0$  υπολογίστε την τροχιά του συστήματος για  $t \rightarrow \infty$  και για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\sigma > 1$  (πχ 2, 10, 30, 100).

## 2.4. Διανυσματικό πεδίο και σημεία ισορροπίας

Για ένα αυτόνομο σύστημα το στοιχειώδες εφαπτόμενο στη τροχιά διάνυσμα  $d\vec{r} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  οφείλει να είναι παράλληλο του διανυσματικού πεδίου (βλ. σχέση (16)). Για το παράδειγμα 2-1 το διανυσματικό πεδίο έχει την μορφή

```
In[1]:= <<Graphics`PlotField`
f1 = x2;
f2 = -x1;
PlotVectorField[{f1, f2}, {x1, -1, 1}, {x2, -1, 1},
Frame -> True]
```



Πράγματι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο οδηγεί σε περιστρεφόμενες τροχιές με φορά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου. Η εποπτεία του διανυσματικού χώρου σε 3 διαστάσεις είναι αρκετά περίπλοκη και επίσης η PlotVectorField λειτουργεί μόνο στις δύο διαστάσεις. Σε ένα μη αυτόνομο σύστημα το διανυσματικό πεδίο αλλάζει με το χρόνο.

**Άσκηση 2.3** Για το μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \sin 2\pi t$  παραστήστε γραφικά το διανυσματικό του πεδίο για τις χρονικές στιγμές  $t=0, 0.25, 0.5, 0.75$ . Σχεδιάστε την τροχιά του συστήματος για αρχικές συνθήκες  $x_1=x_2=1$ ; Πως κατατάσσεται ποιοτικά η παραπάνω τροχιά;

Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της τοπολογίας του χώρου φάσεων αποτελούν τα **σημεία ισορροπίας** του συστήματος (equilibrium points). Ένα σημείο  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  του χώρου φάσεων καλείται σημείο ισορροπίας αν

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

δηλαδή, τα σημεία ισορροπίας είναι τα κρίσιμα σημεία του διανυσματικού πεδίου. Για αρχικές συνθήκες  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  θα έχουμε

$$\dot{x}_i = 0 \Rightarrow x_i = \text{σταθ.} = x_{i0} \quad (i = 1, \dots, n)$$

δηλαδή το η κατάσταση του συστήματος παραμένει σταθερή στο χρόνο.

Τα σημεία ισορροπίας εξαρτώνται από τις τιμές των σταθερών παραμέτρων του συστήματος και βρίσκονται επιλύοντας το αλγεβρικό σύστημα (19). Αν μπορούν να βρεθούν αναλυτικά οι ρίζες του (19) (με την εντολή Solve) τότε παίρνουμε τα σημεία ισορροπίας για κάθε τιμή των παραμέτρων του συστήματος. Σε διαφορετική περίπτωση βρίσκουμε τα σημεία ισορροπίας αριθμητικά (με την NSolve ή την FindRoot) για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων.

### Παράδειγμα 2.3

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος  $\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \dot{x}_2 = kx_1 + x_1x_2^2$

```
In[1]:= f1 = x1 - 2x2; f2 = kx1 + x1*x2^2;
```

```
EqPoints = Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}]
```

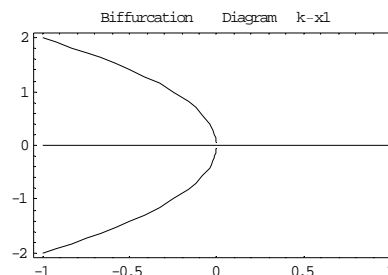
```
Out[2]= {{x1 -> 0, x2 -> 0}, {x1 -> -2 i sqrt(k), x2 -> -i sqrt(k)}, {x1 -> 2 i sqrt(k), x2 -> i sqrt(k)}}
```

Παρατηρούμε ότι για θετικές τιμές της παραμέτρου  $k$  έχουμε ένα σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$  (αφού οι υπόλοιπες ρίζες είναι μιγαδικές) ενώ για  $k < 0$  έχουμε τρία σημεία ισορροπίας. Για την κρίσιμη τιμή  $k=0$  λέμε ότι έχουμε ένα *σημείο διακλάδωσης* του συστήματος ενώ τα διαγράμματα <παραμέτρος-θέση>, δηλαδή για τη συγκεκριμένη περίπτωση τα  $k$ - $x_1$  και  $k$ - $x_2$  ονομάζονται διαγράμματα διακλάδωσης.

```

In[3]:= x11 = x1 /. EqPoints[[1]] ;
        x12 = x1 /. EqPoints[[2]] ;
        x13 = x1 /. EqPoints[[3]] ;
        Plot[{x11, x12, x13}, {k, -1, 1}, Frame -> True, Axes -> False,
        PlotLabel -> "Bifurcation Diagram k-x1"]

```



### Παράδειγμα 2.4.

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος  $\dot{x}_1 = x_1 + x_2 / 2$ ,  $\dot{x}_2 = k + x_1 x_2^3$

Για το παραπάνω σύστημα η Solve δεν μπορεί να μας δώσει τις ρίζες και έτσι καταφεύγουμε στον αριθμητικό προσδιορισμό των ριζών με την FindRoot. Για  $k=1$  και ξεκινώντας την εύρεση της ρίζας από το σημείο εκκίνησης<sup>2</sup>  $x_1=x_2=1$  παίρνουμε

```

In[1]:= k = 1;
        f1 = x1 + x2 / 2; f2 = k + x2^3 x1;
        FindRoot[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, 1}, {x2, 1}, MaxIterations -> 30]

```

```

Out[3]:= {x1 -> -0.594604, x2 -> 1.18921}

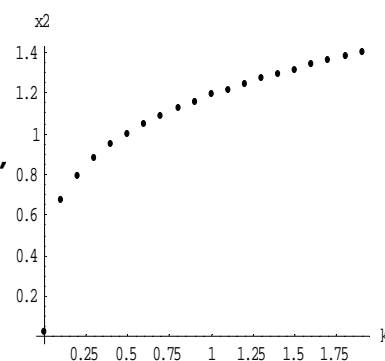
```

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $k$  σε ένα διάστημα  $[k_l, k_2]$  και με βήμα  $\Delta k$ . Έτσι σχηματίζουμε ένα σύνολο από ζεύγη τιμών  $(k, x_i)$  ή  $(k, x_2)$  τα οποία μπορούν να παρασταθούν γραφικά. Στον παρακάτω κώδικα θεωρούμε το  $k$  στο διάστημα  $[0, 2]$  και βήμα  $\Delta k=0.1$ . Η ρίζα που βρίσκεται για κάποια τιμή του  $k$  τίθεται ως το σημείο εκκίνησης της FindRoot για την εύρεση της ρίζας για  $k+\Delta k$ .

```

In[5]:= list = {}; (*Λίστα αποθήκευσης (k,x2)*)
        eqpointx1 = 1; eqpointx2 = 1; (*Σημείο εκκίνησης*)
        For[k = 0.0, k < 2, k = k + 0.1,
        f1 = x1 + x2 / 2; f2 = k + x2^3 x1;
        EqPoint = FindRoot[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, eqpointx1},
        {x2, eqpointx2}, MaxIterations -> 30];
        eqpointx1 = x1 /. EqPoint[[1]];
        eqpointx2 = x2 /. EqPoint[[2]];
        AppendTo[list, {k, eqpointx2}];]
        ListPlot[list, AxesLabel -> {"k", "x2"},
        PlotStyle -> PointSize[0.02]]

```



Η χρήση της FindRoot μας δίνει, στην καλύτερη περίπτωση, ως έξοδο μια ρίζα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $k$  και έτσι σχηματίζουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια από σημεία ισορροπίας (όπως αυτή του παραπάνω προγράμματος). Το σύστημα όμως μπορεί να έχει και άλλες ρίζες οι οποίες προσδιορίζονται αν επιλεγεί κατάλληλα η θέση εκκίνησης  $(x_{10}, x_{20})$  της FindRoot.

**Άσκηση 2.4.** Για το σύστημα του παραδείγματος (2.4) προσδιορίστε μια άλλη μονοπαραμετρική οικογένεια σημείων ισορροπίας θεωρώντας ως εκκίνηση τη θέση  $(x_{10}, x_{20})=(1, -1)$ . Υπάρχει άλλη οικογένεια;

<sup>2</sup> Βλ. σχετικά με την λειτουργία της FindRoot και τη μέθοδο Newton-Raphson

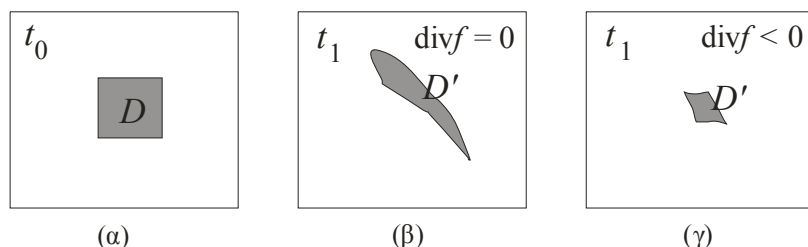
Μια σημαντική ιδιότητα των σημείων ισορροπίας είναι η **ευστάθειά** τους. Αν στη γειτονιά ενός σημείου ισορροπίας υπάρχουν τροχιές που είναι ανοιχτές για  $t \rightarrow +\infty$  τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται *ασταθές*, σε διαφορετική περίπτωση ονομάζεται *ευσταθές*. Με την ευστάθεια θα ασχοληθούμε ειδικότερα στα επόμενα κεφάλαια.

## 2.5 Διατηρητικά και μη διατηρητικά συστήματα

Έστω ένα  $n$ -διάστατο αυτόνομο σύστημα  $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  και  $D$  ένα φραγμένο και συνεχές υποσύνολο του χώρου φάσεων  $\mathbb{R}^n$  με «όγκο»  $V_D$

$$V_D = \iint \dots \int_{D \subset \mathbb{R}^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Κάθε σημείο του  $D$  αποτελεί μια αρχική συνθήκη  $A=(x_{10}, \dots, x_{n0})$ . Ξεκινώντας με αφετηρία το σημείο αυτό, κάτω από την ροή σε χρόνο  $t$  το σύστημα θα βρεθεί στη θέση  $B=(x_1, \dots, x_n) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  ή, με άλλα λόγια, λέμε ότι το σημείο  $A$  απεικονίζεται στο σημείο  $B$  κάτω από τη ροή  $f_t$ . Θεωρώντας την παραπάνω διαδικασία για κάθε σημείο του  $D$  θα πάρουμε την απεικόνισή του  $D'$  κάτω από τη ροή  $f_t$  (βλ. σχήμα 3). Αν για κάθε  $D \subset \mathbb{R}^n$  και για κάθε  $t$  ισχύει  $V_D = V_{D'}$ , δηλαδή ο όγκος του χώρου των φάσεων διατηρείται κάτω από την ροή του δυναμικού συστήματος, το σύστημα ονομάζεται **διατηρητικό** (area preserving). Αν  $V_D < V_{D'}$ , δηλαδή ο όγκος φθίνει με το χρόνο, το σύστημα ονομάζεται σύστημα με **απώλειες** (dissipative) ενώ αν  $V_D > V_{D'}$ , δηλαδή ο όγκος αυξάνει με το χρόνο, το σύστημα ονομάζεται «**εκρηκτικό**» (explosive). Τα εκρηκτικά συστήματα οδηγούν σε λύσεις που τείνουν στο άπειρο και δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντίθετα τα συστήματα με απώλειες οδηγούν το σύστημα προς ένα ελκτικό σύνολο μικρότερης διάστασης από αυτή του συστήματος και έτσι η μελέτη της εξέλιξης των τροχιών ανάγεται στην μελέτη των ιδιοτήτων αυτού του ελκτικού υποσυνόλου. Τα διατηρητικά συστήματα παρουσιάζουν επίσης ξεχωριστό ενδιαφέρον και σ'αυτά περιλαμβάνονται τα μηχανικά συστήματα που διατηρούν την ενέργεια και, γενικότερα, τα Χαμιλτονιανά συστήματα.



**Σχήμα 3.** α) Υποσύνολο αρχικών συνθηκών ( $t_0=0$ ) στο χώρο φάσεων β) Κατανομή θέσεων για  $t_1 > t_0$  σε ένα διατηρητικό σύστημα γ) το ίδιο όπως το (β) για ένα σύστημα με απώλειες.

Η διατήρηση ή όχι των όγκων στο χώρο των φάσεων εξαρτάται από την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου του συστήματος:

$$\text{div} \vec{f} = 0 \Rightarrow \text{Διατηρητικό σύστημα}$$

$$\text{div} \vec{f} < 0 \Rightarrow \text{Σύστημα με απώλειες}$$

$$\text{div} \vec{f} > 0 \Rightarrow \text{Εκρηκτικό σύστημα}$$

Εν' γένει έχουμε  $\text{div} \vec{f} = g(x_i)$  και η εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται από την περιοχή των αρχικών συνθηκών στο χώρο των φάσεων. Και σ'αυτή την περίπτωση το σύστημα ονομάζεται «σύστημα με απώλειες» (dissipative).

### Παράδειγμα 2-5

Για το σύστημα του παραδείγματος (2-2) έχουμε

```
In[1]:= << Calculus`VectorAnalysis`
SetCoordinates[Cartesian[x1, x2, x3]];
f = {x2 + x3 / 2, -x1, -x3 + x1^2};
Print["Απόκλιση = div f = ", Div[f]]

Απόκλιση = div f = -1
```

```
In[5]:= (*Απλούστερα*)
f1 = x2 + x3 / 2; f2 = -x1; f3 = -x3 + x1^2;
divf = D[f1, x1] + D[f2, x2] + D[f3, x3]

Out[6]= -1
```

δηλαδή έχουμε ένα σύστημα με απώλειες.

Άσκηση 2.5. Δείξτε ότι το σύστημα

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3$$

όπου  $\sigma, r, b$  σταθερές, είναι σύστημα με απώλειες για κάθε θετική τιμή των παραμέτρων του.

### Κεφάλαιο 3ο

## Συστήματα Ενός Βαθμού Ελευθερίας

### 3.1 Ορισμός

Ένα δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας (1BE) περιγράφεται από την αυτόνομη διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης της μορφής

$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (20)$$

Θα θεωρούμε πάντα την  $f$  ως αναλυτική συνάρτηση στον χώρο που μελετούμε το σύστημα. Στα πλαίσια της μηχανικής, η (20) μπορεί να περιγράψει, για παράδειγμα, την μονοδιάστατη κίνηση ενός υλικού σημείου, μάζας  $m$ , υπό την επίδραση μιας δύναμης  $F=f(x)/m$ . Η (20) γράφεται υπό την συνήθη μορφή δυναμικού συστήματος ως

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= f(x) \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} \eta' \\ \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = f(x_1) = f_2 \end{array} \right) \quad (21)$$

όπου  $x_1=x$  και  $x_2=p$ . Αν το παραπάνω σύστημα εκφράζει την μονοδιάστατη κίνηση που αναφέραμε παραπάνω τότε η μεταβλητή  $x$  είναι η θέση και η μεταβλητή  $p$  η ορμή του σώματος η οποία συμπίπτει με την ταχύτητα για  $m=1$ . Συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται οι όροι **θέση** και **ταχύτητα** για τις μεταβλητές  $x$  και  $p$ , αντίστοιχα, τους οποίους και θα χρησιμοποιούμε στα παρακάτω.

### 3.2 Γενικά χαρακτηριστικά

Το σύστημα (21) είναι ένα αυτόνομο σύστημα 2 διαστάσεων με χώρο φάσεων το επίπεδο **θέση-ταχύτητα** ( $x-p$ ). Κατά συνέπεια οι αρχικές συνθήκες θα είναι οι  $x_0$  και  $p_0$  και μπορούν να αναφέρονται στο χρόνο  $t=0$ .

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι **διατηρητικό**, αφού

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f(x)}{\partial p} = 0 \quad (22)$$

και ορίζοντας την **συνάρτηση δυναμικού**

$$U(x) = -\frac{df}{dx} \quad (23)$$

προκύπτει ότι το σύστημα διαθέτει το **ολοκλήρωμα ενέργειας**

$$E = \frac{1}{2} p^2 + U(x) = \text{σταθ.} \quad (24)$$

Για δεδομένη αρχική τιμή της ενέργειας  $E_0 = p_0^2/2 + U(x)$ , η φασική τροχιά  $(x(t), p(t))$  οφείλει να διατηρεί αυτή την τιμή, δηλαδή  $E(x, p) = E_0$ ,  $\forall t$  και να πληροί την σχέση

$$E - U(x) \geq 0 \quad (25)$$

Η ανισότητα (25) ορίζει τα **όρια της κίνησης** και για δεδομένη τιμή της ενέργειας έχουμε τις περιπτώσεις

$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ : περατωμένη φασική τροχιά

$x_{\min} \leq x$  ή  $x \leq x_{\max}$  ή  $x \in (-\infty, +\infty)$ : ανοιχτή φασική τροχιά

Για το σύστημα (21) κάθε φασική τροχιά αντιστοιχεί σε μια τιμή ενέργειας, και κατά συνέπεια για το ίδιο σύστημα κλειστές και ανοιχτές τροχιές μπορούν να συνυπάρχουν. Επίσης, από την (24) προκύπτει ότι

$$p = \pm \sqrt{2(E - U(x))} \quad (26)$$

οπότε, μέσα στα όρια της κίνησης, το φασικό πορτρέτο παρουσιάζει **συμμετρία** ως προς τον άξονα των  $x$ . Επίσης, μια περατωμένη φασική τροχιά περνάει από τα σημεία  $(x_{\min}, 0)$  και  $(x_{\max}, 0)$ . Έτσι στο διάστημα  $(x_{\min}, x_{\max})$  έχουμε μια τροχιά με  $p \geq 0$  αλλά και τη συμμετρική της



με  $p \leq 0$  που ενώνονται στα παραπάνω σημεία. Λόγω όμως της μοναδικότητας των λύσεων, οι παραπάνω τροχιές δεν μπορούν να τέμνονται εγκάρσια αλλά να ενώνονται ομαλά και να αποτελούν ουσιαστικά την ίδια τροχιά. Άρα μια **περατωμένη** τροχιά του συστήματος (21) είναι μια **κλειστή** τροχιά και, αφού το σύστημα είναι αυτόνομο, οφείλει να είναι **περιοδική**. Αν  $T$  είναι η περίοδος μιας περατωμένης τροχιάς ενέργειας  $E$ , τότε η κίνηση από τη θέση  $x_{min}$  έως τη θέση  $x_{max}$ , και αντίστροφα, θα διαρκεί χρόνο  $t=T/2$ , οπότε από την ολοκλήρωση της σχέσης (26) (θυμίζουμε  $p=dx/dt$ ), προκύπτει

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}} \quad (27)$$

### Παράδειγμα 3-1

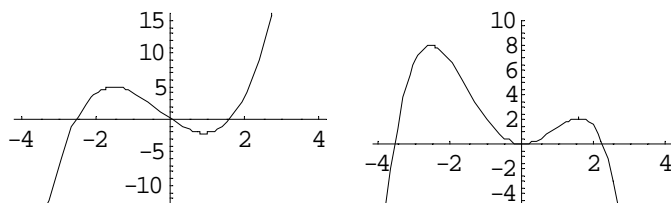
Θεωρούμε υλικό σημείο  $m=1$  που κινείται στον άξονα  $x$  υπό την δύναμη

$$F = x^3 + x^2 - 4x \quad (28)$$

Το δυναμικό  $U$  και τα διαγράμματα δύναμης και δυναμικού θα είναι

```
In[1]:= f[x_] = x^3 + x^2 - 4 x;
        U[x_] = -Integrate[f[x], x]
        plot1 = Plot[f[x], {x, -4, 4}, DisplayFunction->Identity];
        plot2 = Plot[U[x], {x, -4, 4}, PlotRange->{-5, 10}, DisplayFunction->Identity];
        Show[GraphicsArray[{plot1, plot2}], DisplayFunction-> $DisplayFunction]
```

$$\text{Out[2]} = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$



Θεωρούμε τροχιές για το επίπεδο ενέργειας  $E=1$ . Στην ενέργεια αυτή τα όρια των τροχιών προκύπτουν από την σχέση (25) η οποία μας δίνει

```
In[6]:= << Algebra`InequalitySolve`
        domain = 1 - U[x] >= 0;
        InequalitySolve[domain, x]
```

```
Out[8]= x <= Root[12 - 24 #1^2 + 4 #1^3 + 3 #1^4 &, 1] ||
        Root[12 - 24 #1^2 + 4 #1^3 + 3 #1^4 &, 2] <= x <= Root[12 - 24 #1^2 + 4 #1^3 + 3 #1^4 &, 3] ||
        x >= Root[12 - 24 #1^2 + 4 #1^3 + 3 #1^4 &, 4]
```

Παρατηρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές των ορίων της κίνησης δίνονται μέσω των ριζών  $x_1, x_2, x_3$  και  $x_4$  του πολυωνύμου  $12-24x^2+4x^3+3x^4$  (ή ισοδύναμα του πολυωνύμου  $P=1-U(x)$ ) οι οποίες είναι οι

```
In[9]:= NSolve[1 - U[x] == 0, x]
```

```
Out[9]= {{x -> -3.5164}, {x -> -0.688266}, {x -> 0.796613}, {x -> 2.07471}}
```

Άρα στο επίπεδο ενέργειας  $E=1$  αντιστοιχούν τρεις τροχιές :

```

In[1]:= (* Program-P31*)
(*System force function*)
f = x^3 + x^2 - 4 x;
Energy = 1; (*Constant energy level E=1*)
U[x_] = -Integrate[f, x]; (*The potential function*)
(*The velocity function for positive values*)
pp[x_] = Sqrt[2* (Energy - U[x])];
(*Dynamical System*)
deq1 = x'[t] == p[t]; deq2 = p'[t] == f /. {x -> x[t]};
Print["System : ", deq1, " ", deq2]
(*Initial Conditions and Plot of points*)
x10 = -4.0; p10 = pp[x10]; Print["Trajectory 1, x10=", x10, " p10=", p10]
x20 = -0.5; p20 = pp[x20]; Print["Trajectory 2, x20=", x20, " p20=", p20]
x30 = 2.5; p30 = pp[x30]; Print["Trajectory 3, x30=", x30, " p30=", p30]
InitCon = ListPlot[{{x10, p10}, {x20, p20}, {x30, p30}}, PlotJoined -> False,
  PlotStyle -> PointSize[0.03], DisplayFunction -> Identity];
(* Phase space trajectories for E=1 *)
sol1 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x10, p[0] == p10}, {x, p}, {t, -0.4, 0.5}];
xt = x[t] /. sol1[[1]]; pt = p[t] /. sol1[[1]];
trajectory1 = ParametricPlot[{xt, pt}, {t, -0.4, 0.5}, DisplayFunction -> Identity];
sol2 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x20, p[0] == p20}, {x, p}, {t, 0, 4}];
xt = x[t] /. sol2[[1]]; pt = p[t] /. sol2[[1]];
trajectory2 = ParametricPlot[{xt, pt}, {t, 0, 4}, DisplayFunction -> Identity];
sol3 = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x30, p[0] == p30}, {x, p}, {t, -1, 0.5}];
xt = x[t] /. sol3[[1]]; pt = p[t] /. sol3[[1]];
trajectory3 = ParametricPlot[{xt, pt}, {t, -1, 0.5}, DisplayFunction -> Identity];
(*Vector Field*)
<<Graphics`PlotField`
vectorfield = PlotVectorField[{p, f}, {x, -4.5, 4.5}, {p, -4.5, 4.5}, DisplayFunction -> Identity];
(*Total results*)
Show[{InitCon, vectorfield, trajectory1, trajectory2, trajectory3}, Frame -> True,
  AxesLabel -> {"x", "p"}, PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

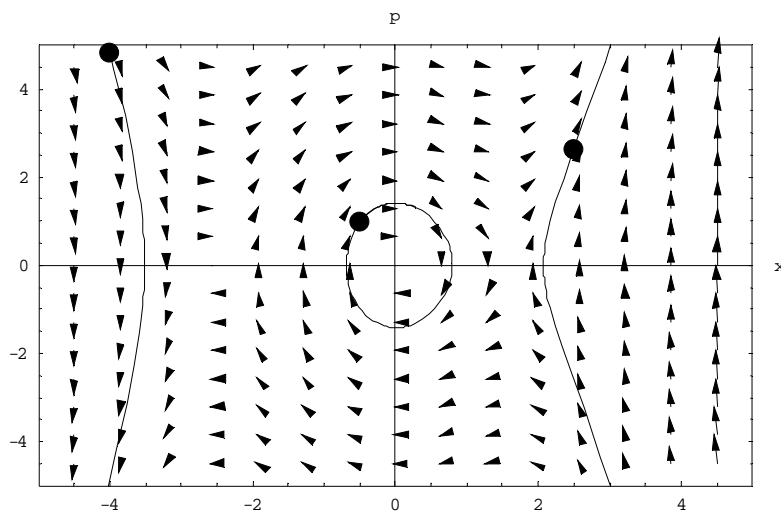
```

System :  $x'[t] == p[t]$   $p'[t] == -4 x[t] + x[t]^2 + x[t]^3$

Trajectory 1, x10=-4. p10=4.83046

Trajectory 2, x20=-0.5 p20=0.97361

Trajectory 3, x30=2.5 p30=2.63589



1<sup>η</sup> τροχιά  $x \leq -3.5164$  (ανοιχτή)  
 2<sup>η</sup> τροχιά  $-0.688266 \leq x \leq 0.796613$  (κλειστή-περιοδική)  
 3<sup>η</sup> τροχιά  $x \geq 2.07471$  (ανοιχτή)

Για να σχεδιάσουμε τρεις αντιπροσωπευτικές τροχιές για  $E=1$ , επιλέγουμε τρεις αρχικές τιμές για τη θέση  $x$  και προσδιορίζουμε την ταχύτητα  $p$  από τη σχέση (26) (με θετικό ή αρνητικό πρόσημο). Υπολογίζουμε τις φασικές τροχιές επιλύοντας τα τρία αντίστοιχα προβλήματα αρχικών τιμών αριθμητικά με την `NDSolve` (γιατί δεν χρησιμοποιείται η `DSolve`;) μέσα σε χρονικά διαστήματα τα οποία θα πρέπει να πληρούν τα παρακάτω κριτήρια:

1. Οι ανοιχτές τροχιές φεύγουν πολύ γρήγορα προς το άπειρο και για αυτό το λόγο τα χρονικά διαστήματα επίλυσης πρέπει να είναι σχετικά μικρά. Σε μεγάλα διαστήματα, η αριθμητική επίλυση αποτυγχάνει λόγω των πολύ μεγάλων αριθμών που παίρνουν οι μεταβλητές του συστήματος.
2. Το χρονικό διάστημα εκτείνεται και σε αρνητικές τιμές για να διαπιστώσουμε από που έρχεται η τροχιά και να σχεδιάσουμε ολοκληρωμένα τη φασική καμπύλη.
3. Για τις κλειστές τροχιές, αρκεί ένα διάστημα ολοκλήρωσης μέσα στο οποίο να κλείνει η τροχιά.

Η φορά εξέλιξης των τροχιών υποδηλώνεται από το διανυσματικό πεδίο του συστήματος. Τα παραπάνω υλοποιούνται στο πρόγραμμα P31.

Η κλειστή τροχιά, για αρχικές συνθήκες  $x_{10} = -0.5$  και  $p_{10} \approx 0.97361$  ( $E=1$ ), επεκτείνεται στο διάστημα  $[x_{min}, x_{max}]$ , όπου τα όρια αυτά αντιστοιχούν σε  $p=0$ . Μέσω της σχέσης (25) μπορούν να προκύψουν ως ρίζες της  $1-U(x)=0$  για τις οποίες, όπως βρήκαμε παραπάνω, έχουμε  $x_{min} \approx -0.688266$  και  $x_{max} \approx 0.796613$ . Έτσι η περίοδος της τροχιάς της συγκεκριμένης τροχιάς μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (27)

```
In[3]:= U = 2 x^2 - x^3/3 - x^4/4 ; Energy = 1;
T = 2 * NIntegrate[1 / Sqrt[2 (Energy - U)] , {x, -0.688266, 0.796613}]
Out[4]= 3.3912
```

**Άσκηση 3.1.** Για τις τρεις αρχικές συνθήκες του παραδείγματος 3.1 υπολογίστε το χρόνο στον οποίο η τροχιά θα περάσει (ή έχει περάσει) από τον άξονα  $p=0$ . Για την κλειστή τροχιά έχουμε  $p=0$  για  $x=x_{min}$  και  $x=x_{max}$ .

**Άσκηση 3.2.** Για το σύστημα του παραδείγματος 3.1, υπολογίστε το διάγραμμα «θέση-Περίοδος» ( $x_{10}-T$ ) για τις τροχιές με αρχικές συνθήκες:  $x_{10}$  στο διάστημα  $[x_{min}, x_{max}]$ , όπου ορίζονται οι κλειστές τροχιές, και  $p_{10}=0$ .

### 3.3. Σημεία ισορροπίας και ευστάθεια

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγράφου 2.4, τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$p = 0, \quad f(x) = 0 \quad (29)$$

Δηλαδή τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν πάντα σε μηδενική ταχύτητα και στις θέσεις όπου η συνάρτηση «δύναμης»  $f$  μηδενίζεται ή ισοδύναμα στα ακρότατα της συνάρτησης δυναμικού  $U$ .

#### Παράδειγμα 3-2α

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος του παραδείγματος (3-1) θα είναι :

```
In[1]:= f = x^3 + x^2 - 4 x;
Solve[f == 0, x]
```

```
Out[2]= {{x -> 0}, {x -> -1/2 (-1 - Sqrt[17])}, {x -> -1/2 (-1 + Sqrt[17])}}
```

ή αριθμητικά

```
In[3]:= NSolve[f == 0, x]
```

```
Out[3]= {{x -> -2.56155}, {x -> 0.}, {x -> 1.56155}}
```

Έστω  $x_0$  ένα σημείο ισορροπίας, οπότε  $x(t)=x_0=\text{σταθ.}$  και  $p=0, \forall t$ . Σύμφωνα με τη μέθοδο διαταραχών, θεωρούμε μια *κοντινή* τροχιά στο σημείο ισορροπίας που την περιγράφουμε με την σχέση

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t), \quad p(t) = \Delta p(t), \quad (|\Delta x(0)| + |\Delta p(0)| \ll 1) \quad (30)$$

Η απομάκρυνση ή όχι της παραπάνω τροχιάς από το σημείο ισορροπίας εξαρτάται από την εξέλιξη των ποσοτήτων  $\Delta x$  και  $\Delta p$  στο χρόνο. Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (30) στο δυναμικό σύστημα (21) θα πάρουμε

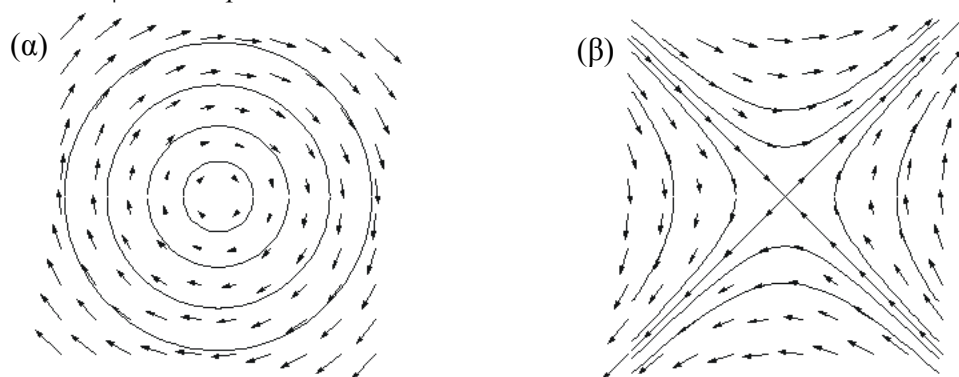
$$\Delta \dot{x} = \Delta p, \quad \Delta \dot{p} = f(x_0 + \Delta x)$$

και αναπτύσσοντας την  $f(x_0 + \Delta x)$  σε σειρά Taylor μέχρι πρώτης τάξης, παίρνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\Delta \dot{x} = \Delta p, \quad \Delta \dot{p} = k \Delta x, \quad k = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \quad (31)$$

Η χρονική εξέλιξη των  $\Delta x$  και  $\Delta p$  δίνεται από την (31) στην οποία έχουμε δύο ποιοτικά διαφορετικές καταστάσεις.

Για  $k < 0$  το σύστημα (31) είναι το σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή που μελετήσαμε στο παράδειγμα 2-1, και το οποίο μας δίνει περατωμένες φασικές τροχιές  $\Delta p^2 + k \Delta x^2 = \text{σταθ.} (\ll 1)$  και το φασικό πορτρέτο έχει τη μορφή του σχήματος 1α. Για  $k > 0$  η (31) μας δίνει τις ανοιχτές φασικές τροχιές  $\Delta p^2 - k \Delta x^2 = \text{σταθ.}$  (υπερβολές) και το φασικό πορτρέτο έχει τη μορφή του σχήματος 1β. Εκτός από την οικογένεια των υπερβολικών φασικών καμπύλων έχουμε και τις «ασύμπτωτες» ευθείες  $\Delta p = \pm k |\Delta x|$  στα τέσσερα τεταρτημόρια του επιπέδου των φάσεων  $x-p$ .



**Σχήμα 4** Φασικό πορτρέτο για το σύστημα (31) α)  $k < 0$  – αρμονικός ταλαντωτής και ευστάθεια β)  $k > 0$  – σύστημα «απωστικών δυνάμεων» και αστάθεια.

Από το σχήμα 1 παρατηρούμε ότι για  $k = (df/dx)_{x_0} < 0$  οι κινήσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας  $x_0$  είναι περατωμένες (δηλαδή τροχιές που ξεκινούν κοντά στο σημείο ισορροπίας παραμένουν κοντά σε αυτό) και το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως **γραμμικά ευσταθές**. Για  $k > 0$ , γύρω από το σημείο ισορροπίας οι φασικές τροχιές είναι ανοιχτές (δηλαδή τροχιές που ξεκινούν κοντά στο σημείο ισορροπίας φεύγουν μακριά από αυτό με το χρόνο) και το σημείο χαρακτηρίζεται ως γραμμικά ασταθές. Επίσης παρατηρούμε ότι κατά μήκος των ασύμπτωτων ευθειών στο 2<sup>ο</sup> και στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο η κίνηση, για  $t \rightarrow \infty$ , προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας, ενώ στο 1<sup>ο</sup> και στο 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, οι τροχιές απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας για  $t \rightarrow \infty$  (ή ισοδύναμα, το προσεγγίζουν για  $t \rightarrow -$

∞). Έτσι οι ασύμπτωτες ευθείες σχηματίζουν στην ευσταθή ( $p=-k(x-x_0)$ ) και την ασταθή ( $p=k(x-x_0)$ ) διεύθυνση για το ασταθές σημείο ισορροπίας. Για κάθε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας ο φασικός χώρος κοντά στα σημεία ισορροπίας του πρέπει να είναι τοπολογικά όμοιος με αυτόν των σχημάτων 1α και 1β ανάλογα με το είδος της ευστάθειας η οποία υπολογίζεται άμεσα από την σχέση (31) με τον προσδιορισμό της σταθεράς  $k$ . Από την ίδια σχέση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα ευσταθή σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν σε ελάχιστα του δυναμικού  $U(x)$ , ενώ τα ασταθή σε μέγιστα. Έτσι πάνω στον άξονα των  $x$ , στη περίπτωση ύπαρξης 2 ή περισσότερων σημείων ισορροπίας, το είδος της ευστάθειας εναλλάσσεται. Για  $k=0$ , η ευστάθεια κρίνεται γραμμικά **κρίσιμη** και η γενικότερη συμπεριφορά των λύσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας εξαρτάται από τους μη γραμμικούς όρους της σειράς Taylor του συστήματος.

**Άσκηση 3.3.** Να βρεθεί η λύση  $x(t)$ ,  $p(t)$  του συστήματος (31) (όπου θέτουμε  $\Delta x=x$  και  $\Delta p=p$ ) για  $k>0$  και κατά μήκος των ασύμπτωτων ευθειών.

### Παράδειγμα 3-2β.

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος του παραδείγματος 3-1. Από την σχέση (31) βρίσκουμε  $k=3x_0^2+2x_0-4$ , όπου  $x_0$  η θέση του υπό μελέτη σημείου ισορροπίας τα οποία βρέθηκαν στο παράδειγμα 3-2α. Το πρόσημο του  $k$  θα καθορίσει το είδος της ευστάθειας. Με τους παρακάτω υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι για  $x=0$  έχουμε ευσταθές σημείο ισορροπίας, ενώ τα άλλα δύο είναι ασταθή.

```
In[1]:= f = x^3 + x^2 - 4 x;
X0 = NSolve[f == 0, x]
k[x_] = D[f, x]
x01 = x /. X0[[1]]; x02 = x /. X0[[2]]; x03 = x /. X0[[3]];
Print["1st Equilibrium point x0=", x01, " Stability Index k=", k[x01]]
Print["2nd Equilibrium point x0=", x02, " Stability Index k=", k[x02]]
Print["3rd Equilibrium point x0=", x03, " Stability Index k=", k[x03]]
```

```
Out[2]:= {{x -> -2.56155}, {x -> 0.}, {x -> 1.56155}}
```

```
Out[3]:= -4 + 2 x + 3 x^2
```

```
1st Equilibrium point x0=-2.56155 Stability Index k=10.5616
```

```
2nd Equilibrium point x0=0. Stability Index k=-4.
```

```
3rd Equilibrium point x0=1.56155 Stability Index k=6.43845
```

### 3.4. Διακλαδώσεις σημείων ισορροπίας

Σε πολλές περιπτώσεις το σύστημα το οποίο μελετούμε ενδέχεται να περιέχει μια ή περισσότερες παραμέτρους που καθορίζουν την εξέλιξη του συστήματος. Η αλλαγή των τιμών αυτών των παραμέτρων γενικά επηρεάζει την συμπεριφορά του συστήματος με την εμφάνιση ή εξαφάνιση σημείων ισορροπίας ή με την αλλαγή της ευστάθειας τους. Παρακάτω θα θεωρήσουμε για λόγους απλότητας ένα μονοπαραμετρικό σύστημα

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = f(x; a) \quad a \in \mathbb{R} \quad (32)$$

όπου το  $a$  συμβολίζει την παράμετρο του συστήματος. Είναι φανερό ότι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x, a)=0$ , που αποτελούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος εξαρτώνται από την εκάστοτε τιμή της σταθεράς  $a$ . Έτσι οι θέσεις των σημείων ισορροπίας  $x_0=x_0(a)$  σχηματίζουν οικογένειες καμπύλων στο επίπεδο  $(x-x_0)$  που σχηματίζουν το **διάγραμμα διακλαδώσεων**. Οι παραπάνω καμπύλες είναι τόσες όσες και τα σημεία ισορροπίας του

συστήματος. Αν για κάποια τιμή  $a=a^*$  ο αριθμός των σημείων ισορροπίας αλλάζει, το σημείο αυτό στο διάγραμμα  $(a-x_0)$  ονομάζεται **σημείο διακλάδωσης**.

### Παράδειγμα 3-3

Θεωρούμε το σύστημα με συνάρτηση δύναμης

$$f = x^3 + x^2 - ax, \quad a \in \mathbb{R} \quad (33)$$

Το σύστημα (28) αποτελεί μια υποπερίπτωση του (33) στο οποίο πλέον έχουμε την πραγματική παράμετρο  $a$  η οποία καθορίζει τη συμπεριφορά των λύσεων.

#### α) αναλυτική προσέγγιση

Τα σημεία ισορροπίας εξαρτώνται από την παράμετρο  $a$  και θα προκύψουν από τη λύση της  $f=0$ :

```
In[1]:= f = x^3 + x^2 - a * x; EqPoint = Solve[f == 0, x]
```

```
Out[1]:= {{x -> 0}, {x -> -1 - Sqrt[1 + 4 a]}, {x -> -1 + Sqrt[1 + 4 a]}}
```

Παρατηρούμε ότι έχουμε το σημείο  $x_{10}=0$  σημείο ισορροπίας για κάθε τιμή του  $a$ . Αντίθετα τα άλλα σημεία ισορροπίας  $x_{20}$  και  $x_{30}$  εμφανίζονται για  $a > -1/4$  οπότε για  $a=a^*=-1/4$  έχουμε ένα σημείο διακλάδωσης. Η ευστάθειά τους θα καθοριστεί από τον δείκτη ευστάθειας  $k=df/dx|_{x_0}$ . Για το κάθε σημείο έχουμε τους δείκτες:

```
In[2]:= k = D[f, x]; (*Stability index*)
```

```
k1 = k /. EqPoint[[1]]; k2 = k /. EqPoint[[2]]; k3 = k /. EqPoint[[3]];
```

```
Print["k1=", k1, " k2=", k2, " k3=", k3]
```

```
k1=-a k2=-1-a-Sqrt[1+4a]+3/4(-1-Sqrt[1+4a])^2 k3=-1-a+Sqrt[1+4a]+3/4(-1+Sqrt[1+4a])^2
```

Άμεσα βλέπουμε ότι το σημείο ισορροπίας  $x_{10}=0$  είναι ασταθές για  $a < 0$  και ευσταθές για  $a > 0$ . Για τα σημεία  $x_{20}$  και  $x_{30}$  επιλύουμε τις ανισότητες  $k2 > 0$  και  $k3 > 0$  (έλεγχος ευστάθειας)

```
In[5]:= << Algebra`InequalitySolve`
```

```
InequalitySolve[k2 > 0, a]
```

```
InequalitySolve[k3 > 0, a]
```

```
Out[6]:= a > -1/4
```

```
Out[7]:= a > 0
```

Έχουμε λοιπόν ότι το σημείο  $x_{20}$ , στο διάστημα  $a > -1/4$  που ορίζεται, είναι πάντα ασταθές ενώ το  $x_{30}$  είναι ασταθές στο διάστημα  $a > 0$  και συνεπώς ευσταθές στο διάστημα  $-1/4 < a < 0$ . Άρα και στο σημείο 0 έχουμε αλλαγή της ευστάθειας και το σημείο  $a=a^*=0$  μπορεί να χαρακτηριστεί επίσης ως σημείο διακλάδωσης. Το διάγραμμα διακλαδώσεων (παρουσιάζεται στο σχήμα 2α στο οποίο τα ευσταθή σημεία παρουσιάζονται με έντονη γραμμή) προκύπτει τελικά από τον κώδικα

```
x10 = x /. EqPoint[[1]]; x20 = x /. EqPoint[[2]]; x30 = x /. EqPoint[[3]];
```

```
gr1 = Plot[x10, {a, -2, 0}, DisplayFunction -> Identity];
```

```
gr2 = p2 = Plot[x10, {a, 0, 4}, PlotStyle -> {Thickness[0.01]}, DisplayFunction -> Identity];
```

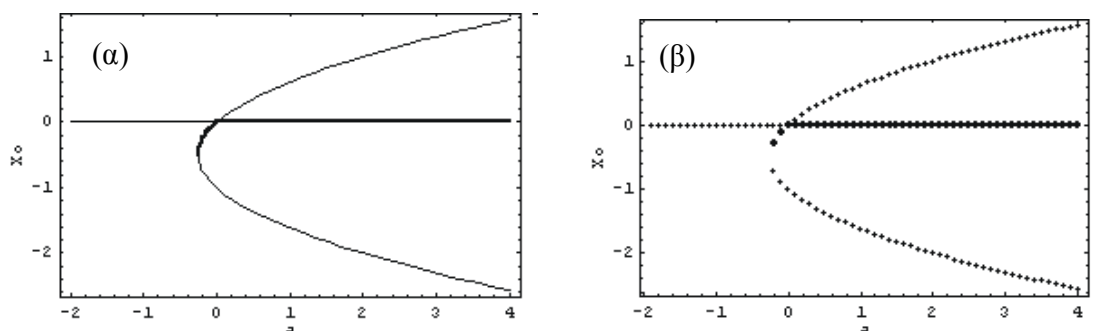
```
gr3 = Plot[x20, {a, -1/4, 4}, DisplayFunction -> Identity];
```

```
gr4 = Plot[x30, {a, -1/4, 0}, PlotStyle -> {Thickness[0.01]}, DisplayFunction -> Identity];
```

```
gr5 = Plot[x30, {a, 0, 4}, DisplayFunction -> Identity];
```

```
Show[{gr1, gr2, gr3, gr4, gr5}, Frame -> True, FrameLabel -> {"a", "Xo"}, Axes -> False,
```

```
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



**Σχήμα 5.** Διαγράμματα διακλάδωσης για το σύστημα α) αναλυτική προσέγγιση β) αριθμητική προσέγγιση.

### β) Αριθμητική προσέγγιση

Στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει πολυπλοκότητα που δεν μας επιτρέπει να προχωρήσουμε στην ανάλυση που περιγράψαμε παραπάνω, τότε προχωρούμε στην αριθμητική ανάλυση των σημείων ισορροπίας ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία.

1. Ορίζουμε ένα διάστημα τιμών  $[a_{min}, a_{max}]$  της παραμέτρου  $a$  του συστήματος και ένα βήμα  $\Delta a$  και μελετούμε το σύστημα για κάθε συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $a = a_{min} + n\Delta a \leq a_{max}$ ,  $n=1,2,\dots$ .
2. Για κάθε  $a$  βρίσκουμε αριθμητικά τα σημεία ισορροπίας με την NSolve ή την FindRoot. Σημειώνουμε ότι η FindRoot (μέθοδος Newton-Raphson) επιστρέφει μία μόνο ρίζα ανάλογα με την αρχική τιμή που της δίνουμε. Έτσι πρέπει η FindRoot να εκτελεστεί για αρχικές τιμές που βρίσκονται «κοντά» στις ρίζες ώστε να εντοπιστούν όλες οι λύσεις. Στην περίπτωση της NSolve θα πρέπει να απορρίπτουμε τις μιγαδικές λύσεις που προκύπτουν.
3. Για τις πραγματικές ρίζες  $x_0$  που βρέθηκαν παραπάνω υπολογίζουμε τον δείκτη ευστάθειας  $k$  και καταχωρούμε το σημείο  $(a, x_0)$  ανάλογα την ευστάθειά του σε μια λίστα (πχ την L1 για τα ευσταθή και την L2 για τα ασταθή).
4. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία 2 και 3 για όλες τις διακριτές τιμές της παραμέτρου  $a$  και σχεδιάζουμε τα σημεία της λίστας L1 και L2.

Ένα παράδειγμα της παραπάνω διαδικασίας δίνεται με το παρακάτω πρόγραμμα, το αποτέλεσμα του οποίου παρουσιάζεται στο σχήμα 2β.

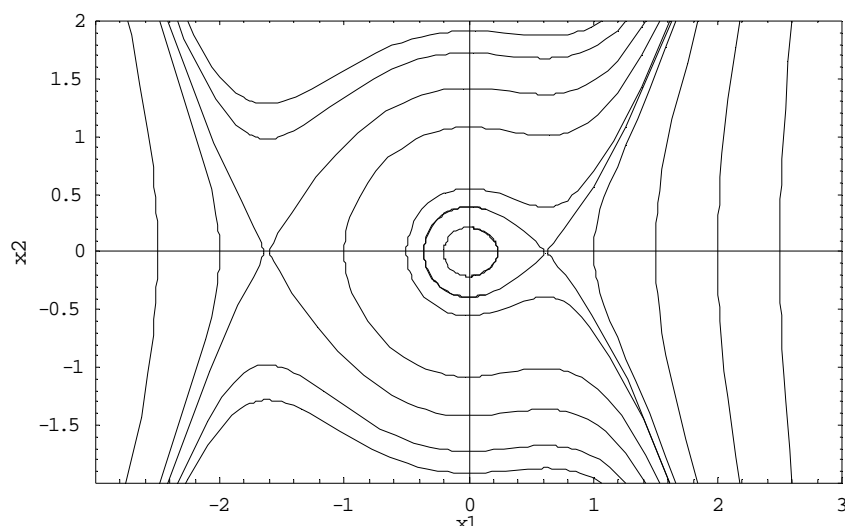
```
(*Bifurcation Diagram *)
Clear["Global`*"]
amin = -2; amax = 4; da = 0.1; (*Interval of study amin<a<amax, da=Step*)
f[x_, a_] := x^3 + x^2 - a * x; (*System function*)
k[x_, a_] := Evaluate[D[f[x, a], x]] ; (*Stability index*)
a = amin
l11 = {}; (*list for storing (a,x0) data for stable points k<0*)
l12 = {}; (*list for storing (a,x0) data for unstable points k>0*)
While[a < amax,
{
a = a + da;
X0 = NSolve[f[x, a] == 0, x];
n = Length[X0];
For[i = 1, i <= n, i = i + 1,
{x0 = x /. X0[[i]];
stability = 1;
If[Im[x0] == 0, {stability = k[x0, a];
If[stability < 0, AppendTo[l11, {a, x0}], AppendTo[l12, {a, x0}]]];}]]
}]
}]

plot1 = ListPlot[l11, PlotJoined -> False, PlotStyle -> PointSize[0.02],
Frame -> True, DisplayFunction -> Identity];
plot2 = ListPlot[l12, PlotJoined -> False, PlotStyle -> PointSize[0.015],
Frame -> True, DisplayFunction -> Identity];
Show[{plot1, plot2}, Axes -> False, FrameLabel -> {"a", "X0"},
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

### 3.5. Φασικά διαγράμματα

Στο διδιάστατο χώρο φάσεων των συστημάτων της μορφής (21) οι φασικές τροχιές αποτελούν καμπύλες της μορφής  $F(x,y)=σταθ.$ , ανοιχτές ή κλειστές, ενώ τα σημεία ισορροπίας αποτελούν μεμονωμένα σημεία πάνω στον άξονα των θέσεων  $x$ . Όπως ήδη αναφέραμε στη προηγούμενη παράγραφο, οι φασικές καμπύλες κοντά στα σημεία ισορροπίας θα έχουν τη μορφή αυτή των σχημάτων 1α ή 1β. Μακρύτερα από αυτές τις περιοχές ή στην περίπτωση κρίσιμης ευστάθειας οι φασικές καμπύλες προκύπτουν από την αναλυτική ή την αριθμητική λύση των εξισώσεων του συστήματος και οι ασυμπτωτικές ευσταθείς και ασταθείς «ευθείες» που ξεκινούν από τα ασταθή σημεία συνεχίζουν σε καμπύλες και ονομάζονται **ευσταθείς** και **ασταθείς πολλαπλότητες** αντίστοιχα. Γενικά η αναλυτική λύση μπορεί να μην είναι διαθέσιμη ή να είναι αρκετά πολύπλοκη ώστε να μπορούμε άμεσα να κατανοήσουμε την δυναμική του συστήματος. Έτσι, επιλέγουμε συνήθως την αριθμητική ολοκλήρωση οι οποία θα πρέπει να γίνεται για αντιπροσωπευτικές τροχιές που να αποκαλύπτουν όλα τα χαρακτηριστικά της δυναμικής του συστήματος. Με αυτή την έννοια το φασικό πορτρέτο θα πρέπει να υποδεικνύει τη θέση των σημείων ισορροπίας, την ευστάθειά τους και τις περιοχές των ανοιχτών ή κλειστών τροχιών.





Σχήμα 6. Φασικό διάγραμμα του συστήματος (33) για  $\alpha=1$ .

Με το κώδικα του προγράμματος “PhSpace2” μπορούμε να δημιουργούμε τα φασικά πορτρέτα δισδιάστατων συστημάτων. Στον κώδικα εισάγουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

**Πεδίο “Graphics Box”:** ορισμός του χώρου γραφικών του φασικού διαγράμματος ( $GX1=x_{min}, GX2=x_{max}, GY1=y_{min}, GY2=y_{max}$ )

**Πεδίο “System parameters”:** εισάγουμε τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος.

**Πεδίο “Vector field...”:** εισάγουμε τις συναρτήσεις  $f1$  και  $f2$  του συστήματος σε μεταβλητές  $x1$  και  $x2$ .

**Πεδίο “Initial Conditions and ...”:** εισάγουμε στη λίστα **L0** τα στοιχεία  $\{x10, x20, tmin, tmax\}$ , όπου  $x10, x20$  οι αρχικές συνθήκες για  $t=0$  και  $tmin-tmax$  το χρονικό διάστημα της ολοκλήρωσης. Εισάγουμε τα παραπάνω στοιχεία για κάθε τροχιά που θέλουμε να ολοκληρώσουμε.

Στη συνέχεια το πρόγραμμα δημιουργεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων και για κάθε στοιχείο της λίστας αρχικών συνθηκών **L0** ολοκληρώνει αριθμητικά το σύστημα, δημιουργεί τη φασική τροχιά και την τοποθετεί σε πίνακα. Στο τέλος σχεδιάζονται όλες οι τροχιές του παραπάνω πίνακα.

Στη λίστα του προγράμματος έχουμε εισάγει και μελετούμε το σύστημα (33) για  $\alpha=1$ . Το φασικό διάγραμμα που παράγεται παρουσιάζεται στο σχήμα 6. Υπενθυμίζουμε ότι, καθώς ο χρόνος αυξάνεται οι τροχιές διαγράφονται από αριστερά προς τα δεξιά για  $p=x2>0$  και αντίστροφα για  $p=x2<0$ . Για το συγκεκριμένο φασικό διάγραμμα μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

1. Το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  είναι ευσταθές και περικλείεται από κλειστές-περιοδικές τροχιές.
2. Υπάρχουν δύο ασταθή σημεία ισορροπίας στις θέσεις  $x \approx -1.62$  και  $x \approx 0.62$ . Στο πρώτο σημείο αντιστοιχούν ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες που έρχονται και φεύγουν από/στο άπειρο, αντίστοιχα. Αντίθετα στο δεύτερο σημείο μία ευσταθής πολλαπλότητα έρχεται από το άπειρο και μία ασταθής φεύγει στο άπειρο, ενώ οι άλλες δύο (μία ευσταθής και μία ασταθής) ενώνονται ομαλά περικλείοντας την περιοχή των κλειστών τροχιών.
3. Όλες οι ασταθείς πολλαπλότητες χωρίζουν το χώρο φάσεων σε 6 περιοχές στις οποίες οι φασικές τροχιές παρουσιάζουν ποιοτικά διαφορετική εξέλιξη καθώς  $t \rightarrow \infty$  ή  $t \rightarrow -\infty$ .

(\*PhSpace2: PHASE SPACE for 2 x2 SYSTEMS  
x1'=f1(x1,x2) x2'=f2(x1,x2)\*)

```
Clear["Global`*"];
(*Graphics Box*)
GX1 = -3; GX2 = 3; GY1 = -2; GY2 = 2;
(*SYSTEM PARAMETERS*)
a = 1;
(* VECTOR FIELD OF THE SYSTEM in x1,x2 variables*)
f1 = x2;
f2 = x1^3 + x1^2 - a x1;
(*----- Initial Conditions and Integration interval -----*)
L0 = {{-2.5, 0, -4, 4}, {-2, 0, -4, 4}, {-1.65, 0, -4, 4}, {-1.6, 0, -5, 5},
      {-1, 0, -3, 3}, {-0.5, 0, -5, 5}, {-0.2, 0, -5, 5}, {0.61, 0, -8, 8}, {0.63, 0, -4, 4},
      {1, 0, -1, 1}, {1.5, 0, -1, 1}, {2, 0, -1, 1}, {2.5, 0, -1, 1},
      {-1.5, 1, -4, 4}, {-1.5, -1, -4, 4}, {-1.5, 1.3, -4, 4}, {-1.5, -1.3, -4, 4}};
(* ----- DIFFERENTIAL EQUATIONS ----- *)
(*right parts - ODE system*)
def1 = f1 /. {x1 -> x1[t], x2 -> x2[t]}; deq1 = x1'[t] == def1;
def2 = f2 /. {x1 -> x1[t], x2 -> x2[t]}; deq2 = x2'[t] == def2;
Print["SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS"]; Print[deq1, " ", deq2];
(* ----- PHASE SPACE ----- *)
(*----- Run and create trajectories-----*)
LN0 = Length[L0]; (*Number of Initial Conditions*)
For[i = 1, i <= LN0, i++, {
  x10 = L0[[i, 1]]; x20 = L0[[i, 2]]; (*Initial Conditions*)
  t1 = L0[[i, 3]]; t2 = L0[[i, 4]]; (*integration interval t1<t<t2*)
  sol = NDSolve[{deq1, deq2, x1[0] == x10, x2[0] == x20}, {x1, x2}, {t, t1, t2}];
  xt1 = x1[t] /. sol[[1]];
  xt2 = x2[t] /. sol[[1]];
  traj[i] = ParametricPlot[{xt1, xt2}, {t, t1, t2}, PlotRange -> {{GX1, GX2}, {GY1, GY2}},
    DisplayFunction -> Identity];
} (*end For*)
(* Put all plots in a table *)
AllTrajectories = Table[traj[i], {i, 1, LN0}];
(*Plot all trajectories*)
Show[AllTrajectories, Frame -> True, FrameLabel -> {"x1", "x2"}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Print["Phase Space , Number of Trajectories=", LN0];
```

**Κεφάλαιο 4ο**

Γραμμική προσέγγιση γύρω από σημεία ισορροπίας.

**4.1 Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων**

Η μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας ενός αυτόνομου συνεχούς δυναμικού συστήματος ξεκινά με τη μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος. Αν

$$\dot{x}_i = f_i(x_j), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (34)$$

είναι ένα εν γένει μη γραμμικό σύστημα με σημείο ισορροπίας το  $x^* = \{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}\}$  για το οποίο (βλ. 2.4)

$$f_i(x_{j0}) = 0.$$

Γραμμικοποιούμε το παραπάνω σύστημα γύρω από τη λύση ισορροπίας  $x^*$ , δηλαδή θέτουμε

$$x_i = x_{i0} + z_i, \quad |z_i| \ll 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

έτσι ώστε, αναπτύσσοντας κατά Taylor,

$$f_i(x_j) = f_i(x_{j0}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_{j0}) z_k + O(\xi^2)$$

και εφαρμόζοντας το παραπάνω ανάπτυγμα στο σύστημα (34) παίρνουμε το σύστημα

$$\dot{z}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_{j0}) z_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Το σύστημα (35) είναι αυτόνομο, μια και οι εξισώσεις δεν περιέχουν άμεσα το χρόνο. Είναι επίσης με σταθερούς συντελεστές μια και οι παράγωγοι των  $f_i$  υπολογίζονται στο σημείο ισορροπίας  $x^*$ . Το σημείο  $x^*$  ονομάζεται **γραμμικά ευσταθές**, αν όλες οι λύσεις του γραμμικού συστήματος (35) είναι περατωμένες για κάθε  $t > 0$ . Επομένως η μελέτη της γραμμικής ευστάθειας γύρω από ένα σημείο ισορροπίας ανάγεται στη μελέτη ενός γραμμικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές, το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{x^*}. \quad (36)$$

Το παραπάνω σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας, το  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ή  $x_i = 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , και μόνο αυτό, όταν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  δεν έχει μηδενικές ιδιοτιμές, δηλαδή όταν είναι αντιστρέψιμος.

**Παράδειγμα 4-1.**

Θα βρούμε το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 \quad (37)$$

Τα σημεία ισορροπίας του είναι

**In[38]:** `f1 = x1 + x1 * x2; f2 = x2 + x1^2;`

`eqp = NSolve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}]`

**Out[39]:** `{{x2 -> -1., x1 -> -1.}, {x2 -> -1., x1 -> 1.}, {x2 -> 0., x1 -> 0.}}`

Έχουμε λοιπόν τρία σημεία ισορροπίας. Για την ανάπτυξη των συναρτήσεων  $f_1$  και  $f_2$  γύρω από ένα σημείο ισορροπίας  $x^* = (x_{10}, x_{20})$  ακολουθούμε την διαδικασία: 1) Κάνουμε την αντικατάσταση  $x_i = x_{i0} + z_i$  ( $i=1,2$ ), 2) Αναπτύσσουμε σε σειρά (Series) τις  $f_1$  και  $f_2$  μέχρι

όρους  $1^{\text{ης}}$  τάξης ως προς  $z_1$  και  $z_2$  και αντικαθιστούμε στα  $x_{i0}$  τις τιμές για το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας (Χρησιμοποιούμε τις εντολές `Normal` και `ExpandAll` για να αποκόψουμε τα σύμβολα για τους όρους ανώτερης τάξης και να πάρουμε το ανάπτυγμα σε μονώνυμα με όρους  $z_1, z_2$  και  $z_1 z_2$ . 3) Οι όροι  $z_1, z_2$  είναι ουσιαστικά  $2^{\text{ης}}$  τάξης αλλά το Mathematica θεωρεί τις δύο μεταβλητές ανεξάρτητες και αναπτύσσει τη σειρά πρώτα ως προς την μια και στη συνέχεια ως προς την άλλη. Έτσι πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση  $z_1 z_2 \rightarrow 0$ .

Πχ, για το  $2^{\circ}$  σημείο  $x^*=(1,-1)$  έχουμε

```
In[45]:= x10 = 1; x20 = -1;
s1 = Normal[Series[f1 /. {x1 -> x1 + z1, x2 -> x2 + z2}, {z1, 0, 1}, {z2, 0, 1}]] /. {x1 -> x10, x2 -> x20} // Expand;
s2 = Normal[Series[f2 /. {x1 -> x1 + z1, x2 -> x2 + z2}, {z1, 0, 1}, {z2, 0, 1}]] /. {x1 -> x10, x2 -> x20} // Expand;
s1 = s1 /. {z1 z2 -> 0}; s2 = s2 /. {z1 z2 -> 0};
Print["Linear System z1'=", s1, " z2'=", s2]
```

Linear System z1' = z2 z2' = 2 z1 + z2

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ο  $A = \{\{0,1\}, \{2,1\}\}$  ο οποίος φυσικά θα μπορούσε να εξαχθεί άμεσα από τον τύπο (35)

```
In[58]:= a11 = D[f1, x1] /. {x1 -> x10, x2 -> x20}; a12 = D[f1, x2] /. {x1 -> x10, x2 -> x20};
a21 = D[f2, x1] /. {x1 -> x10, x2 -> x20}; a22 = D[f2, x2] /. {x1 -> x10, x2 -> x20};
A = MatrixForm[{{a11, a12}, {a21, a22}}]
```

$$\text{Out}[60]//\text{MatrixForm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4.2. Λύση του Γραμμικού συστήματος

Θα ασχοληθούμε με τη λύση του γραμμικού συστήματος (36). Ορίζουμε το εκθετικό ενός πίνακα  $\mathbf{A}$  ως εξής

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει για κάθε πίνακα  $\mathbf{A}$ . Παρατηρήστε ότι

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \mathbf{A}^k}{(k-1)!} = \mathbf{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}}.$$

Συνεπώς οι λύσεις του γραμμικού συστήματος (36) θα είναι

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0, \quad (38)$$

όπου  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  οι αρχικές συνθήκες, αφού

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0) = \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

## 4.3. Γραμμικά συστήματα 2 διαστάσεων με σταθερούς συντελεστές

Ένα γραμμικό σύστημα 2 διαστάσεων με σταθερούς συντελεστές θα είναι της γενικής μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (39)$$

όπου  $a_{ij}$  πραγματικές σταθερές. Η γενική λύση του παραπάνω συστήματος μπορεί να βρεθεί με το MATHEMATICA αλλά είναι αρκετά πολύπλοκη.

```
In[3]:= deq1 = x1'[t] == a11 x1[t] + a12 x2[t]; deq2 = x2'[t] == a13 x1[t] + a14 x2[t];
sol = DSolve[{deq1, deq2}, {x1[t], x2[t]}, t]
```

$$x1[t] \rightarrow \left( -a11 e^{\frac{1}{2} \left( a11+a14-\sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2} \right) t} + a14 e^{\frac{1}{2} \left( a11+a14+\sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2} \right) t} + \sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2} e^{\frac{1}{2} \left( a11+a14+\sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2} \right) t} + \dots \right. \\ \left. a13 \left( e^{\frac{1}{2} \left( a11+a14-\sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2} \right) t} - e^{\frac{1}{2} \left( a11+a14+\sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2} \right) t} \right) C[1] \right) \\ x2[t] \rightarrow - \frac{\dots}{\sqrt{a11^2+4a12a13-2a11a14+a14^2}} + \dots$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές  $a_{ij}$  παρουσιάζονται σε συνδυασμούς που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$

```
In[3]:= A =  $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$ ; Eigensystem[A]
```

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \left( a11 + a22 - \sqrt{a11^2 + 4a12a21 - 2a11a22 + a22^2} \right), \frac{1}{2} \left( a11 + a22 + \sqrt{a11^2 + 4a12a21 - 2a11a22 + a22^2} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \left\{ -\frac{a11 + a22 + \sqrt{a11^2 + 4a12a21 - 2a11a22 + a22^2}}{2a21}, 1 \right\}, \left\{ -\frac{a11 + a22 - \sqrt{a11^2 + 4a12a21 - 2a11a22 + a22^2}}{2a21}, 1 \right\} \right\} \right\}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις οποίες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές:

### 1. Ο πίνακας $A$ έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Τότε, αν  $\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{12})$  και  $\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22})$  είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ( $u_{ij} \in \mathbf{R}$ ), όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, η λύση του γραμμικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 u_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{21} e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= c_1 u_{12} e^{\lambda_1 t} + c_2 u_{22} e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad \eta' \quad \mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (40)$$

Παρατηρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες  $x_{10} = x_1(0)$  και  $x_{20} = x_2(0)$  που αντιστοιχούν στην τιμή της αυθαίρετης σταθεράς  $c_1 = 0$  ανήκουν πάνω στην ευθεία  $x_1/x_2 = u_{21}/u_{22}$ , δηλαδή στην ευθεία κατά την διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_2$ . Επίσης παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση έχουμε  $x_1(t)/x_2(t) = u_{21}/u_{22}$   $\forall t$  δηλαδή όταν ξεκινάμε από ένα σημείο πάνω στην ευθεία η φασική καμπύλη διαγράφεται κατά μήκος της ευθείας. Παρόμοια ιδιότητα έχει και η ευθεία κατά μήκος του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_1$  στην οποία αντιστοιχούν αρχικές συνθήκες για  $c_2 = 0$ . Οι ευθείες αυτές ονομάζονται **αναλλοίωτες πολλαπλότητες**.

**Σημείωση.** Αν θεωρήσουμε έναν μετασχηματισμό από το καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα  $(x_1, x_2)$  στο, έν γένει πάγιογώνιο σύστημα,  $(y_1, y_2)$  που ορίζεται από τα  $\mathbf{u}_1$  και  $\mathbf{u}_2$ , το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 \end{aligned} \quad \eta' \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 &= c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (41)$$

Θεωρούμε τις παρακάτω υπο-περιπτώσεις:

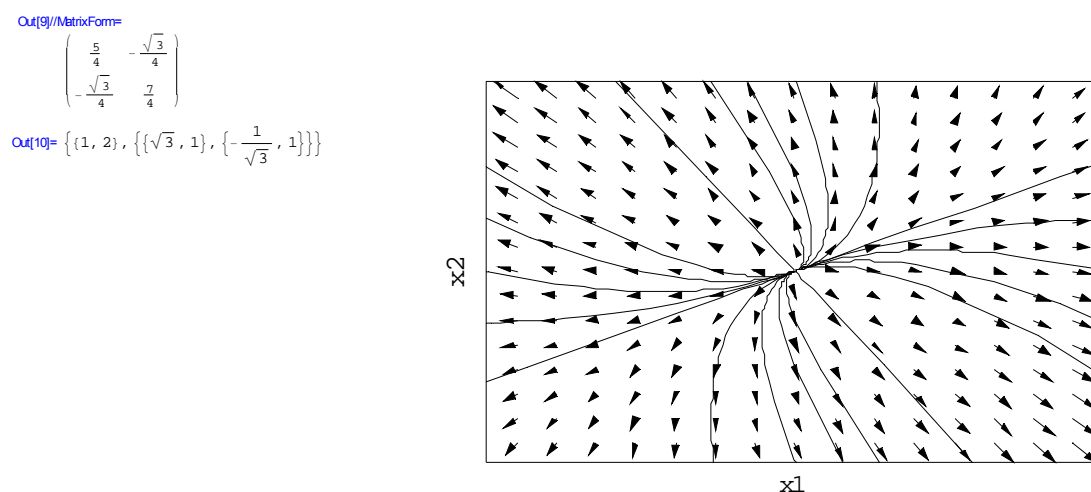
#### 1α. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_2$  ορίζει την **ευσταθή πολλαπλότητα**  $E^s$  του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$  του γραμμικού συστήματος. Οποιαδήποτε τροχιά ξεκινά επάνω στην  $E^s$ , αντιστοιχεί σε  $c_1 = 0$ , συνεπώς παραμένει επάνω της για κάθε  $t$  και επιπλέον, καθώς  $t \rightarrow \infty$ ,

$\mathbf{x}(c_1 = 0) \rightarrow \mathbf{0}$ . Το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_1$  ορίζει αντίστοιχα την **ασταθή πολλαπλότητα**  $E''$  και οποιαδήποτε τροχιά ξεκινά επάνω στην  $E''$ , αντιστοιχεί σε  $c_2 = 0$ , συνεπώς παραμένει επάνω της για κάθε  $t$  και επιπλέον, καθώς  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\mathbf{x}(c_2 = 0) \rightarrow \mathbf{0}$ . Το σημείο  $P^* = (0,0)$  ονομάζεται **σαγματικό** (saddle) και το φασικό διάγραμμα έχει την τοπολογία του σχήματος 1β του κεφαλαίου 3.

1β)  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  ή  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Στην πρώτη περίπτωση το σημείο  $(0,0)$  ονομάζεται **ασταθής κόμβος** και όλες οι λύσεις τείνουν στο  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow -\infty$ , όπως φαίνεται από τη λύση (40). Στη δεύτερη περίπτωση ονομάζεται **ευσταθής κόμβος** και όλες οι λύσεις τείνουν στο  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Το διάγραμμα των τροχιών του συστήματος για την περίπτωση του ασταθούς κόμβου δίνεται στο σχήμα 1. Επίσης παρουσιάζεται ο πίνακας του συγκεκριμένου συστήματος, οι ιδιοτιμές του και τα ιδιοδιανύσματα κατά την διεύθυνση των οποίων οι φασικές καμπύλες είναι ευθείες, καθώς και το διανυσματικό πεδίο που δείχνει την κατεύθυνση της ροής.



Σχήμα 7 Ασταθής Κόμβος (Node)

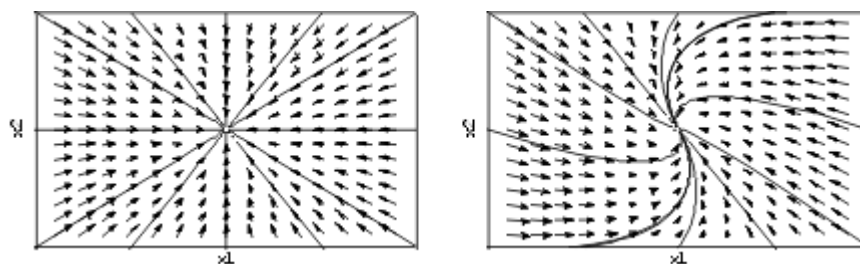
## 2 Ίσες μη μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

Τότε, αν υπάρχουν δύο διαφορετικά ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{u}_1$  και  $\mathbf{u}_2$  που αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή, η λύση δίνεται πάλι από την (40). Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής ή ευσταθής κόμβος, αν  $\lambda > 0$  ή  $\lambda < 0$  αντίστοιχα. Όλες οι τροχιές είναι ευθείες γραμμές, που περνούν από το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$ . Το σχήμα 2 (αριστερά) αντιστοιχεί στην περίπτωση ευσταθούς κόμβου.

Μπορεί όμως στη διπλή ιδιοτιμή να αντιστοιχεί ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}$ . Τότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται και η λύση είναι της μορφής

$$\mathbf{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\mathbf{u}e^{\lambda t} \quad (42)$$

Το διάγραμμα των τροχιών δίνεται παρακάτω, όπου πάλι το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}$  της διπλής ιδιοτιμής  $\lambda$  συμπίπτει με τον άξονα  $x_1$  και το σημείο ισορροπίας είναι (improper) ευσταθής κόμβος όταν  $\lambda < 0$ , μια και τότε  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  όταν  $t \rightarrow \infty$ , ενώ είναι ασταθής κόμβος όταν  $\lambda > 0$ , αφού τότε  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  όταν  $t \rightarrow -\infty$ .



**Σχήμα 8.** (Αριστερά) Ευσταθής Κόμβος για  $\lambda_1=\lambda_2$  αλλά με  $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2 \neq 0$ . (Δεξιά) Ευσταθής Κόμβος για  $\lambda_1=\lambda_2$  αλλά με  $\mathbf{u}_1 \neq 0$  και  $\mathbf{u}_2=0$  (ένα ιδιοδιάνυσμα που για το συγκεκριμένο σχήμα είναι το  $(-1/\sqrt{3}, 1)$ ).

### 3. Ιδιοτιμές μιγαδικές συζυγείς, $\lambda=\alpha+i\beta$ , και $\lambda=\alpha-i\beta$ .

Αν  $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$ , όπου  $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$  και  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ , είναι τα ιδιοδιανύσματα των  $\lambda, \lambda^*$  αντίστοιχα, η λύση  $\mathbf{x}(t)$  είναι η

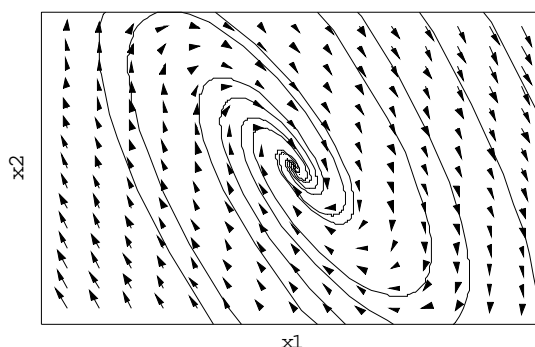
$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{at} \{ \mathbf{u} \cos \beta t + \mathbf{v} \sin \beta t \} + c_2 e^{at} \{ -\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{v} \cos \beta t \} \quad (43)$$

όπου  $c$  είναι το διάνυσμα των αυθαίρετων σταθερών που συνδέεται με τις αρχικές συνθήκες  $x_{10}$  και  $x_{20}$  σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Όταν  $\alpha < 0$ , ισχύει ότι  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  όταν  $t \rightarrow \infty$  και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **ευσταθής εστία**. Για  $\alpha > 0$ , το σημείο ισορροπίας είναι **ασταθής εστία** και ισχύει ότι  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  όταν  $t \rightarrow -\infty$ . Για  $\alpha=0$  η λύση (43) εκφράζει ελλείψεις δηλαδή κλειστές περιοδικές τροχιές με περίοδο  $T=2\pi/\beta$  και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **κέντρο** (η περίπτωση αυτή είναι παρόμοια με την περίπτωση ευστάθειας στα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας, βλ. παράγραφος 3.3). Η σταθερά  $\beta$  συνδέεται με την διεύθυνση συστροφής της εστίας ή των περιοδικών τροχιών γύρω από το κέντρο. Στο σχήμα 3 παρουσιάζεται μια ευσταθής σπείρα που αντιστοιχεί στον πίνακα  $A=\{\{1,1\}, \{-4,-2\}\}$ . Επίσης δίνονται οι αντίστοιχες μιγαδικές ιδιοτιμές και τα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \\ \left\{ \left\{ -\frac{1}{2} \pm (-i + \sqrt{7}) \right\}, \frac{1}{2} \pm (i + \sqrt{7}) \right\}, \\ \left\{ \left\{ \frac{1}{8} (-3 + i\sqrt{7}), 1 \right\}, \left\{ \frac{1}{8} (-3 - i\sqrt{7}), 1 \right\} \right\}$$



**Σχήμα 9** Ευσταθής εστία

### Παράδειγμα 4-2

Το παρακάτω παράδειγμα στο Mathematica βρίσκει τη λύση ενός διδιάστατου γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με κεντρικό σαγματικό σημείο. Η λύση που δίνει το Mathematica είναι συναρτήσεις των αρχικών συνθηκών, δηλαδή τα  $C[1]$  και  $C[2]$  είναι οι αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_{20}$  δηλαδή το  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20})^T$  όπως εμφανίζεται στη λύση (3.4.7). Στο πρόγραμμα επίσης βρίσκονται τα  $y1f, y2f$ , δηλαδή η

λύση με τα  $c_1, c_2$  όπως δίνεται από τον τύπο (3.4.8) ( $x_0 = Pc$  όπου  $P = \text{Transpose}[B]$ ). Στη συνέχεια δίνονται οι γραφικές παραστάσεις κάποιων τροχιών για επιλεγμένες αρχικές συνθήκες. οι τροχιές βρίσκονται στις συναρτήσεις curve, curve2, curve3 και curve4 και τέλος σχεδιάζονται αυτές οι τροχιές όλες μαζί με τη βοήθεια του ParametricPlot και του Show.

(\*Υπολογίζει τη λύση του συστήματος γραμμικών

Δ.Ε. με πίνακα A\*)

A = {{1, -1}, {-2, 0}};

y = {y1[x], y2[x]};

ydot = {y1'[x], y2'[x]};

Solution = DSolve[ydot == A.y, {y1[x], y2[x]}, x]

y1 = y1[x] /. Solution[[1]];

y2 = y2[x] /. Solution[[1]];

$$\left\{ \left\{ y1[x] \rightarrow \frac{1}{3} (C[1] + 2e^{3x}C[1] + C[2] - e^{3x}C[2]), \right. \right. \\ \left. \left. y2[x] \rightarrow -\frac{1}{3} e^{-x} (-2C[1] + 2e^{3x}C[1] - 2C[2] - e^{3x}C[2]) \right\} \right\}$$

(\*Αντικαθιστά τις αρχικές συνθήκες με c1,c2\*)

Eigenvalues[A]

B = Eigenvectors[A]

c = {c1, c2};

X0 = Transpose[B].c;

y1f = y1 /. {C[1] → X0[[1]], C[2] → X0[[2]]} // Simplify

y2f = y2 /. {C[1] → X0[[1]], C[2] → X0[[2]]} // Simplify

$$\left\{ \left\{ 1, 2 \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (c1 - c2) \\ 2 c1 e^{-x} - c2 \end{array} \right\} \right\}$$

(\*Υπολογίζει τις αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα\*)

curve3 = {{y1f /. {c1 → 1, c2 → 0}, y2f /. {c1 → 1, c2 → 0}},

{y1f /. {c1 → -1, c2 → 0}, y2f /. {c1 → -1, c2 → 0}}}

curve4 = {{y1f /. {c1 → 0, c2 → 1}, y2f /. {c1 → 0, c2 → 1}},

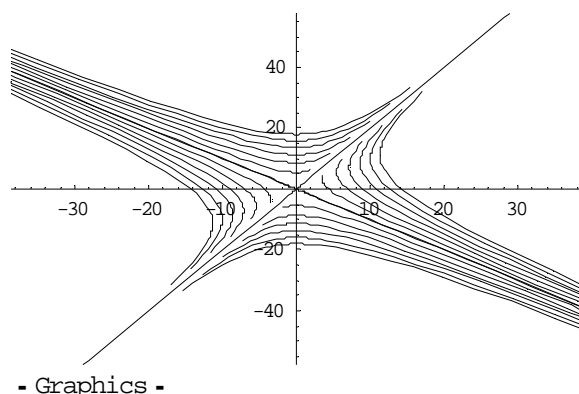
{y1f /. {c1 → 0, c2 → -1}, y2f /. {c1 → 0, c2 → -1}}}

$$\left\{ \left\{ e^{-x}, 2e^{-x} \right\}, \left\{ -e^{-x}, -2e^{-x} \right\} \right\} \\ \left\{ \left\{ -e^{2x}, e^{2x} \right\}, \left\{ e^{2x}, -e^{2x} \right\} \right\}$$



```
(*Υπολογίζει διαφορες αρχικές συνθήκες για διάφορες
τροχιές*)
ic = Table[6 - i, {i, 0, 12}];
curve =
  Table[{y1f /. {c1 → ic[[i]], c2 → 6},
    y2f /. {c1 → ic[[i]], c2 → 6}}, {i, 1, Length[ic]};
curve2 =
  Table[{y1f /. {c1 → ic[[i]], c2 → -6},
    y2f /. {c1 → ic[[i]], c2 → -6}}, {i, 1, Length[ic]};

(*Σχεδιάζει τις διάφορες τροχιές στο χώρο φάσεων*)
gr3 = ParametricPlot[Evaluate[curve3], {x, -5, 5},
  DisplayFunction → Identity];
gr4 = ParametricPlot[Evaluate[curve4], {x, -2, 2},
  DisplayFunction → Identity];
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[curve], {x, -1, 1},
  DisplayFunction → Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[curve2], {x, -1, 1},
  DisplayFunction → Identity];
Show[{gr1, gr2, gr3, gr4}, AxesOrigin → {0, 0},
  DisplayFunction → $DisplayFunction]
```



Παρατηρήστε επίσης ότι το curve3 σχεδιάζει την ευσταθή πολλαπλότητα, δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή, ενώ το curve4 σχεδιάζει την ασταθή πολλαπλότητα, δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην θετική ιδιοτιμή.

### Παράδειγμα 4-3.

Το παρακάτω notebook βρίσκει τα σημεία ισορροπίας ενός συστήματος

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2; k), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2; k),$$

όπου  $k$  ελεύθερη παράμετρος (ή παράμετροι) του συστήματος. Αν υπάρχει ελεύθερη παράμετρος πρέπει να γίνει χρήση της Solve η οποία λειτουργεί σωστά μόνο αν οι  $f_1$  και  $f_2$  είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Αν δεν υπάρχει ελεύθερη παράμετρος ή το σύστημα μελετάται για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου τότε θέτουμε  $\text{Stydy}=2$  για να γίνει αριθμητική εύρεση των σημείων ισορροπίας (με την NSolve). Το πρόγραμμα δίνει ως αποτέλεσμα τα σημεία ισορροπίας και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

```
(* EQPSTAB2x2.nb
POINTS and STABILITY for 2x2 SYSTEMS
      x1'=f1(x1,x2)   x2'=f2(x1,x2)   , f1,f2 : polynomials *)
Clear["Global`*"];
Study = 1; (* 1 for analytic , 2: for numerical*)
(* VECTOR FIELD OF THE SYSTEM *)
f1 = k - x1^2;
f2 = -x2;

(* PART 1 : EQUILIBRIUM POINTS *)
If[Study == 1, Eqp = Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}],
  Eqp = NSolve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}]];
eqpnumber = Length[Eqp];
Print["*****"]
Print[eqpnumber, " Equilibrium Points ", Eqp]
Print["*****"]
(* PART 2 - STABILITY *)
a11 = D[f1, x1]; a12 = D[f1, x2]; a21 = D[f2, x1]; a22 = D[f2, x2];
A = {{a11, a12}, {a21, a22}}; (*Matrix of Linearized system*)

(* LOOP : Find Eigensystem for all equilibrium points *)

For[n = 1, n <= eqpnumber, n++,
{
  Print["** Equilibrium Point n=", n, " X0=", Eqp[[n]], "*****"];
  b = A /. Eqp[[n]];
  Print["A=", MatrixForm[b]];
  Print["Eigenvalues = ", Eigenvalues[b]]
  Print["Eigenvectors = ", Eigenvectors[b]]
}]
```

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

```
*****
2 Equilibrium Points  {{x2 -> 0, x1 -> -sqrt[k]}, {x2 -> 0, x1 -> sqrt[k]}}
*****
* Equilibrium Point n=1 X0={x2 -> 0, x1 -> -sqrt[k]}**
A=

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{k} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues = {-1, 2 sqrt[k]}
Eigenvectors = {{0, 1}, {1, 0}}
Equilibrium Point n=2 X0={x2 -> 0, x1 -> sqrt[k]}*
A=

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{k} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

$$\text{Eigenvalues} = \{-1, -2\sqrt{k}\}$$

$$\text{Eigenvectors} = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}$$

Ασκηση 4.1. Για τα γραμμικά συστήματα με πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα σαν συναρτήσεις της παραμέτρου  $a$  και να προσδιοριστούν οι τιμές  $a=a^*$  για τις οποίες παρατηρείται αλλαγή ευστάθειας.
- β) Για ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου  $a$ , για τις οποίες έχουμε διαφορετικό τύπο ευστάθειας, να σχεδιαστούν τα φασικά διαγράμματα.

**Κεφάλαιο 5ο****Μη Γραμμικά Συστήματα****5.1 Σημεία ισορροπίας μη γραμμικών συστημάτων.**

Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_i = f_i(x_j), \quad i, j = 1, \dots, n$$

του οποίου η λύση γράφεται ως

$$x_i = x_i(t; x_{j0})$$

όπου  $x_{j0}$  οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή  $x_{i0} = x_i(0; x_{j0})$ . Η λύση συμβολίζεται επίσης και ως  $\phi_i(\mathbf{x})$ , όπου  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών.

Όπως δείξαμε, ο πίνακας του γραμμικού συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος είναι ο

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) (\mathbf{x}^*).$$

Αυτός καθορίζει τη γραμμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$ . Αν δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα έχουν πραγματικό μέρος  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **γραμμικά ευσταθές** ενώ αν έστω και μία ιδιοτιμή έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **γραμμικά ασταθές**. Επιπλέον, το σημείο ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος, του πίνακα του οποίου οι ιδιοτιμές έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ , ονομάζεται **υπερβολικό**.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς για τις περιπτώσεις που αναλύσαμε στον  $\mathbb{R}^2$ , το σάγμα, ο κόμβος και η εστία είναι υπερβολικά σημεία ισορροπίας ενώ το κέντρο είναι μη υπερβολικό. Επίσης το σάγμα, ο ασταθής κόμβος και η ασταθής εστία είναι γραμμικά ασταθή σημεία ισορροπίας, ενώ ο ευσταθής κόμβος, η ευσταθής εστία και το κέντρο είναι γραμμικά ευσταθή.

Στην περιγραφή του σάγματος αναφερθήκαμε στην ύπαρξη ενός ευσταθούς και ενός ασταθούς υπόχωρου,  $E^s$  και  $E^u$  αντίστοιχα. Στην περίπτωση του ευσταθούς κόμβου και της ευσταθούς εστίας, ολόκληρος ο  $\mathbb{R}^2$  αποτελεί τον ευσταθή υπόχωρο, αφού ισχύει  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  για κάθε σημείο  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ , μια και όλοι οι όροι της λύσης  $e^{\lambda t}$ ,  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ , τείνουν στο μηδέν καθώς  $t \rightarrow \infty$  για  $\lambda < 0$  και  $\alpha < 0$ . Επίσης στην περίπτωση του ασταθούς κόμβου και της ασταθούς εστίας, ολόκληρος ο  $\mathbb{R}^2$  αποτελεί τον ασταθή υπόχωρο, αφού ισχύει  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow -\infty$  για κάθε σημείο  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ , μια και όλοι οι όροι της λύσης  $e^{\lambda t}$ ,  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ , τείνουν στο μηδέν καθώς  $t \rightarrow -\infty$  για  $\lambda > 0$  και  $\alpha > 0$ .

**5.2. Ορισμοί και Θεωρήματα ευστάθειας.**

Θα δώσουμε τώρα τοπολογικούς ορισμούς για την ευστάθεια και την αστάθεια των σημείων ισορροπίας στα μη γραμμικά συστήματα. Ένα σημείο ισορροπίας θα λέγεται **ευσταθές**, αν  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall \mathbf{x}: d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < \delta$  και  $\forall t \geq 0$  ισχύει ότι  $d(\phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) < \varepsilon$ , όπου  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  είναι η συνηθισμένη απόσταση στον  $\mathbb{R}^n$ , δηλαδή

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Ας αναλύσουμε τον παραπάνω ορισμό. Όσο κοντά κι αν απαιτήσουμε να παραμένει η τροχιά ενός σημείου  $\mathbf{x}$ , για άπειρο χρόνο, στο σημείο ισορροπίας (δηλαδή το  $\phi_t(\mathbf{x})$  να παραμένει σε μία  $\varepsilon$ -περιοχή του σημείου ισορροπίας, όσο μικρό και να είναι το  $\varepsilon$ ), υπάρχουν πάντα αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}$  σε μία  $\delta$ -περιοχή του σημείου ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  που εξασφαλίζουν αυτή την απαίτηση. Ένα σημείο ισορροπίας που δεν είναι **ευσταθές**, ονομάζεται **ασταθές**. Μία υποπερίπτωση της ευστάθειας είναι η ασυμπτωτική ευστάθεια. Ένα σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν  $\exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall \mathbf{x} : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < \delta$  να ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$ .

Στη συνέχεια, για να συνδέσουμε τη γραμμική ευστάθεια με τη (μη γραμμική) ευστάθεια, θα ορίσουμε τι είναι **τοπολογική συζυγία** και θα αναφερθούμε στο **θεώρημα Hartman-Grobman**. Έστω ότι έχουμε δύο δυναμικά συστήματα στον  $\mathbb{R}^n$ , δηλαδή δύο συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, με λύσεις  $\phi_t(\mathbf{x})$  και  $\psi_t(\mathbf{x})$  αντίστοιχα. Αν υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , η οποία να είναι 1-1 (δηλαδή είναι αντιστρέψιμη) και η αντίστροφή της είναι συνεχής (αυτό ονομάζεται ομοιομορφισμός), τέτοια ώστε

$$\phi_t \circ h(\mathbf{x}) = h \circ \psi_t(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \phi_t(h(\mathbf{x})) = h(\psi_t(\mathbf{x})) \quad (1)$$

και αν επιπλέον η  $h$  διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε τα δύο δυναμικά συστήματα ονομάζονται **τοπολογικά ισοδύναμα**. Αν επιπλέον διατηρείται και η παραμετροποίηση των λύσεων ως προς το χρόνο, τότε τα δύο δυναμικά συστήματα ονομάζονται **τοπολογικά συζυγή**. Η βασική ιδιότητα της τοπολογικής συζυγίας είναι ότι οι τροχιές της  $\phi_t$  απεικονίζονται σε τροχιές της  $\psi_t$  και αντίστροφα. Η σχέση (1) γράφεται και ως

$$h^{-1} \circ \phi_t \circ h(\mathbf{x}) = \psi_t(\mathbf{x}).$$

Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε την αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}$  και την απεικονίζουμε σε μια άλλη αρχική συνθήκη  $h(\mathbf{x})$ , παίρνουμε την τροχιά της  $h(\mathbf{x})$  κάτω από το δυναμικό σύστημα  $\phi_t$ , δηλαδή την  $\phi_t(h(\mathbf{x}))$ , που παριστάνει μία καμπύλη στον  $\mathbb{R}^n$ , και στη συνέχεια την απεικονίζουμε σε μια άλλη καμπύλη, την  $h^{-1}(\phi_t(h(\mathbf{x})))$ . Αυτή ακριβώς η καμπύλη είναι η τροχιά του σημείου  $\mathbf{x}$  κάτω από το δυναμικό σύστημα  $\psi_t$ .

Αν λοιπόν ξέρουμε τη λύση ενός δυναμικού συστήματος, π.χ. του  $\psi_t$ , ή έστω κάποιες τοπολογικές ιδιότητές της, και γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας τέτοιος ομοιομορφισμός  $h$ , τότε γνωρίζουμε και τη λύση του  $\phi_t$ , ή ότι η λύση του έχει τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες με την  $\psi_t$ . Αν π.χ.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$ , τότε ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(h(\mathbf{x})) = h(\mathbf{x}^*)$  κλπ.

Το πρώτο θεώρημα που συνδέει τη συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος  $\dot{x}_i = f_i(x_j)$ , σε μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  με τη συμπεριφορά του γραμμικού συστήματος,  $\dot{\zeta} = \mathbf{A}\zeta$ , με πίνακα

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^*},$$

γύρω από το σημείο ισορροπίας του  $\zeta^* = (0, 0, \dots, 0)$ , είναι το **θεώρημα ευσταθούς πολλαπλότητας** (stable manifold theorem):

Έστω  $E$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και έστω  $\dot{x}_i = f_i(x_j)$  με  $f_i \in C^1(E)$ , δηλαδή οι συναρτήσεις  $f_i$  είναι παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο. Επίσης έστω ότι ισχύει  $f_i(x_j^*) = 0$ , δηλαδή το σημείο  $\mathbf{x}^*$  είναι σημείο ισορροπίας. Με μία μετατόπιση των

συντεταγμένων, θέτουμε την αρχή του συστήματος στο  $\mathbf{x}^*$ , έτσι ώστε  $\mathbf{x}^* = (0, 0, \dots, 0)$ . Έστω επίσης ότι ο πίνακας

$$\mathbf{D}f(\mathbf{0}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0,$$

έχει  $k$  ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και  $n - k$  ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος (παρατηρήστε ότι κάτω από αυτή την προϋπόθεση το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^*$  είναι υπερβολικό). Τότε υπάρχει στο χώρο φάσεων του μη γραμμικού συστήματος μία  $k$ -διάστατη επιφάνεια  $S$ , εφαπτόμενη στον ευσταθή υπόχωρο  $E^s$  του γραμμικού συστήματος στο σημείο  $\mathbf{x}^* = (0, 0, \dots, 0)$ .

Το δεύτερο θεώρημα που επίσης συνδέει τη συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος  $\dot{x}_i = f_i(x_j)$ , σε μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^* = (0, 0, \dots, 0)$  με τη συμπεριφορά του γραμμικού συστήματος,  $\dot{\zeta} = \mathbf{A}\zeta$ , γύρω από το σημείο ισορροπίας του  $\zeta^* = (0, 0, \dots, 0)$ , είναι το **θεώρημα Hartman – Grobman**:

Έστω  $E$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και έστω το μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων  $\dot{x}_i = f_i(x_j)$  με  $f_i \in C^1(E)$ . Επίσης έστω ότι ισχύει  $f_i(\mathbf{0}) = 0$ , δηλαδή το σημείο  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  είναι σημείο ισορροπίας. Έστω επίσης ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A} = \mathbf{D}f(\mathbf{0})$  έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος, δηλαδή το  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  είναι υπερβολικό σημείο ισορροπίας. Τότε υπάρχει ομοιομορφισμός  $h: U \rightarrow V$  που διατηρεί τον προσανατολισμό, όπου  $U$  ανοικτό υποσύνολο του  $E$  και  $V$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  για την οποία ισχύει για ένα ανοικτό διάστημα τιμών του  $t$

$$h(\phi_t(\mathbf{x})) = \exp(\mathbf{A}t)h(\mathbf{x}),$$

όπου  $\phi_t(\mathbf{x})$  είναι η λύση του μη γραμμικού συστήματος. Δηλαδή το μη γραμμικό σύστημα είναι τοπολογικά συζυγές προς το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το υπερβολικό σημείο ισορροπίας. Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει για μη υπερβολικά σημεία ισορροπίας. Θα εξηγήσουμε πρώτα το θεώρημα Hartman – Grobman με ένα διδιάστατο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.1. Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2,$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2.$$

Αυτό το σύστημα έχει ένα ολοκλήρωμα της κίνησης, τη συνάρτηση

$$H = -\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) - x_1x_2.$$

και οι φασικές τροχιές του είναι η γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπύλων του  $H$ , δηλαδή της εξίσωσης

$$-\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) - x_1x_2 = h$$

για διάφορες τιμές της σταθεράς  $h$ .

Το παρακάτω πρόγραμμα βρίσκει τα σημεία ισορροπίας και τη γραμμική ευστάθειά τους και σχεδιάζει τις φασικές τροχιές (πορτρέτο του χώρου φάσεων) του παραπάνω μη γραμμικού συστήματος.

```
f1 = -x1 - x2^2;
f2 = x2 + x1^2;
Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}]
```

{ {x1 → -1, x2 → -1}, {x1 → 0, x2 → 0},  
{x1 → (-1)<sup>1/3</sup>, x2 → -(-1)<sup>2/3</sup>}, {x1 → -(-1)<sup>2/3</sup>, x2 → (-1)<sup>1/3</sup>}}

```
Ja[x1_, x2_] = {{D[f1, x1], D[f1, x2]},
                 {D[f2, x1], D[f2, x2]}};
A1 = Ja[0, 0]
Eigenvalues[A1]
A2 = Ja[-1, -1]
Eigenvalues[A2]
```

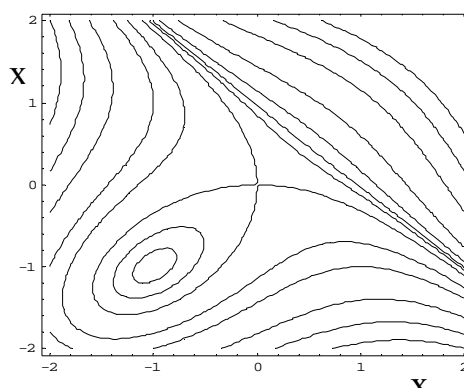
$$\begin{aligned} & \{\{-1, 0\}, \{0, 1\}\} \\ & \{-1, 1\} \\ & \{\{-1, 2\}, \{-2, 1\}\} \\ & \{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\} \end{aligned}$$

Με την εντολή `Solve` βρίσκουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας. Το  $(0,0)$  και το  $(-1,-1)$ . Υπολογίζοντας τον Ιακωβιανό πίνακα  $Df$  για κάθε ένα από τα σημεία ισορροπίας, βλέπουμε ότι το  $(0,0)$  είναι σάγμα και το  $(-1,-1)$  είναι κέντρο. Τα θεωρήματα ευσταθούς πολλαπλότητας και Hartman – Grobman μας εξασφαλίζουν για το σάγμα ότι, για κάποιο χρονικό διάστημα η εικόνα του γραμμικού συστήματος με ένα σαγματικό σημείο θα παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο και θα μας δώσει το φασικό πορτρέτο του μη γραμμικού συστήματος σε ανοικτή περιοχή γύρω από το σάγμα. Παρόλο που το κέντρο είναι μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας και τα παραπάνω θεωρήματα δεν ισχύουν, στο συγκεκριμένο παράδειγμα η εικόνα του φασικού πορτρέτου γύρω από το κέντρο παραμένει η ίδια με αυτή του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος.

```
H = -1/3 * (x1^3 + x2^3) - x1 x2;
DtH = D[H, x1] f1 + D[H, x2] f2 // Simplify
ContourPlot[H, {x1, -2, 2}, {x2, -2, 2}, PlotPoints -> 100,
  ContourShading -> False,
  Contours -> {4, 3, 2, 1, 0.5, 0, -0.2, -0.3, -0.5, -1,
    -2, -3, -4}]
```

Στο παραπάνω πρόγραμμα ορίζεται η συνάρτηση  $H$ , ελέγχεται ότι η παράγωγός της ως προς το χρόνο είναι μηδέν, δηλαδή ότι είναι ολοκλήρωμα της κίνησης και σχεδιάζονται με το `ContourPlot` οι ισοσταθμικές της καμπύλες. Γίνεται επιλογή διαφόρων τιμών της σταθεράς  $h$  με την option `Contours`.

Επειδή δεν υπάρχει πάντοτε ολοκλήρωμα της κίνησης, βρίσκουμε τις φασικές καμπύλες (λύσεις) του παραπάνω συστήματος και με την `NDSolve`

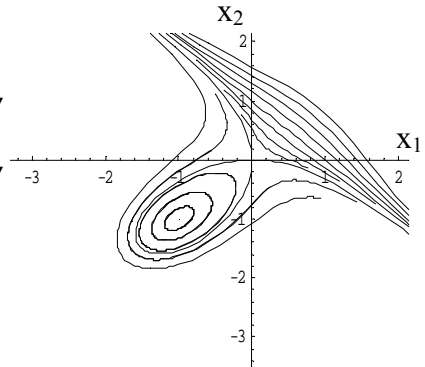


Σχήμα 10. Φασικό διάγραμμα του συστήματος του παραδείγματος 5.1.

```
eq1 = x1'[t] == -x1[t] - x2[t]^2;
eq2 = x2'[t] == x2[t] + x1[t]^2;
sol1 =
  Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == -0.5 - k 0.1,
    x2[0] == -1.5 + k 0.1}, {x1[t], x2[t]}, {t, -2.5, 2.3}],
    {k, 1, 10}];
sol2 =
  Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == 0.1 + k 0.1,
    x2[0] == 0.1 + k 0.1}, {x1[t], x2[t]}, {t, -1.3, 1.3}],
    {k, 1, 8}];
```

```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[sol1], {t, -2.5, 2.3},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[sol2], {t, -1.3, 1.3},
  DisplayFunction -> Identity];
gr3 = ParametricPlot[Evaluate[sol3], {t, -17, 5.5},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2, gr3}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]

sol3 = NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == -0.01, x2[0] == 0.01},
  {x1[t], x2[t]}, {t, -17, 5.5}];
sol1 = Table[{x = x1[t] /. sol1[[i]], y = x2[t] /. sol1[[i]]},
  {i, 1, 10}];
sol2 = Table[{x = x1[t] /. sol2[[i]], y = x2[t] /. sol2[[i]]},
  {i, 1, 8}];
sol3 = {x = x1[t] /. sol3[[1]], y = x2[t] /. sol3[[1]]};
```



Το πρόγραμμα λύνει αριθμητικά το σύστημα που ορίζεται από τις εξισώσεις eq1 και eq2 για κάποιες ομάδες αρχικών συνθηκών. Η sol1 είναι η ομάδα αρχικών συνθηκών που θα μας σχεδιάσει τις φασικές τροχιές στο κάτω αριστερά τεταρτημόριο, η sol2 είναι η ομάδα αρχικών συνθηκών που θα μας σχεδιάσει τις ανοικτές τροχιές στο πάνω δεξιά τεταρτημόριο, ενώ η sol3 αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες πολύ κοντά στο σαγματικό σημείο ισορροπίας (0,0), έτσι ώστε να μας σχεδιάσει με αρκετή ακρίβεια τη διαχωριστική καμπύλη. Τα gr1, gr2, gr3 και το Show σχεδιάζουν στο τέλος τις παραπάνω οικογένειες τροχιών για τις αρχικές συνθήκες που έχουμε επιλέξει.

### 5.3 Θεωρία διακλαδώσεων

Θεωρούμε την οικογένεια συστημάτων διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, m), \quad i, j = 1, \dots, n$$

που εξαρτάται από τη σταθερή παράμετρο  $m$ . Για κάθε τιμή της παραμέτρου  $m$  έχουμε και ένα διαφορετικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με διαφορετική συμπεριφορά των τροχιών. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι για  $m = m_0$  έχουμε ένα σημείο ισορροπίας  $f_i(x_{j0}, m_0) = 0$  και ότι ο πίνακας

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_{j0}, m_0)$$

έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός. Τότε αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος ύπαρξης λύσης πεπλεγμένων συναρτήσεων (implicit function theorem) ότι, για όλα τα συστήματα της μορφής (3.4.4) με  $m \in (-m_0 - a, m_0 + a)$ ,  $a > 0$ , υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας, ως συνέχεια αυτού που για  $m = m_0$  βρίσκεται στο σημείο  $x_j = x_{j0}$ . Αντίθετα,

στην περίπτωση που ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει μηδενικές ιδιοτιμές, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το παραπάνω θεώρημα και είναι γνωστό ότι εν γένει τέτοια σημεία ισορροπίας δεν συνεχίζονται καθώς αλλάζει η παράμετρος  $m$ . Είτε εξαφανίζονται με μεταβολή του  $m$ , είτε δημιουργούνται δύο ή περισσότερα σημεία ισορροπίας με διαφορετική ευστάθεια. Τέτοια σημεία ισορροπίας, όπου ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει μηδενικές ιδιοτιμές, ονομάζονται **σημεία διακλάδωσης** (bifurcation points). Εν γένει σημεία διακλάδωσης ονομάζονται τα μέλη της παραπάνω οικογένειας συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που αντιστοιχούν σε τέτοιες τιμές  $m_0$  της παραμέτρου  $m$  στις οποίες αλλάζει τοπολογικά το φασικό πορτρέτο του



συστήματος. Δηλαδή οι φασικές τροχιές του συστήματος για  $m > m_0$  δεν μπορούν να προέλθουν από **συνεχή** παραμόρφωση των φασικών τροχιών για  $m < m_0$ . Αυτό σημαίνει ότι τα συστήματα για  $m < m_0$  δεν είναι τοπολογικά συζυγή αυτών για  $m > m_0$ . Σημεία ισορροπίας για τα οποία με τη γραμμική θεωρία προκύπτει ότι είναι υπερβολικά, δεν αποτελούν σημεία διακλάδωσης. Αντίθετα, σημεία ισορροπίας τέτοια ώστε  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  για κάποιο  $i$  είναι πιθανά σημεία διακλάδωσης. Αν  $\lambda_i = 0$  για κάποιο  $i$  τότε δεν ισχύει το implicit function theorem και μπορεί να έχουμε αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας ενώ αν  $\lambda_i \neq 0$  για κάθε  $i$  ενώ ταυτόχρονα υπάρχει κάποιο  $i$  για το οποίο  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ , ο αριθμός των σημείων ισορροπίας δεν αλλάζει αλλά μπορεί να αλλάξει το είδος της ευστάθειας τους με αποτέλεσμα να εμφανιστούν άλλες δομές, όπως π.χ. (δες παρακάτω το παράδειγμα της διακλάδωσης Hopf).

### 1. Διακλάδωση σάγματος – κόμβου

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1 = m - x_1^2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

όπου  $m$  σταθερή παράμετρος. Το παραπάνω σύστημα για την τιμή της παραμέτρου  $m = 0$  παρουσιάζει **διακλάδωση σάγματος – κόμβου**. Το σύστημα αυτό έχει τα σημεία ισορροπίας

$$x_1 = -\sqrt{m}, \quad x_2 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{m}, \quad x_2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι για  $m < 0$  δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας, για  $m = 0$  τα δύο σημεία ισορροπίας συμπίπτουν σε ένα στο  $(0,0)$ , ενώ για  $m > 0$  έχει δύο σημεία ισορροπίας. Το παρακάτω πρόγραμμα προσδιορίζει τα σημεία αυτά και το είδος της γραμμικής τους ευστάθειας:

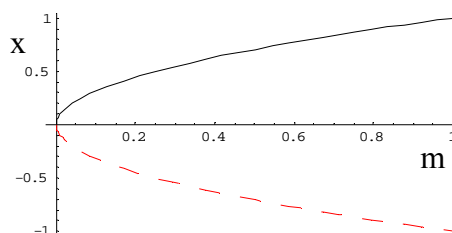
```
f1 = m - x1^2;
f2 = -x2;
sol = Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, x1, x2]
Ja[x1_, x2_] = {{D[f1, x1], D[f1, x2]},
  {D[f2, x1], D[f2, x2]}};
A1 = Ja[-Sqrt[m], 0]
Eigenvalues[A1]
A2 = Ja[Sqrt[m], 0]
Eigenvalues[A2]
```

$$x_2 \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow -\sqrt{m}, \quad \{x_2 \rightarrow 0, \quad \rightarrow \sqrt{m}\}$$

$$\begin{aligned} &\{ \{2\sqrt{m}, 0\}, \{0, -1\} \} \\ &\{-1, 2\sqrt{m}\} \\ &\{ \{-2\sqrt{m}, 0\}, \{0, -1\} \} \\ &\{-1, -2\sqrt{m}\} \end{aligned}$$

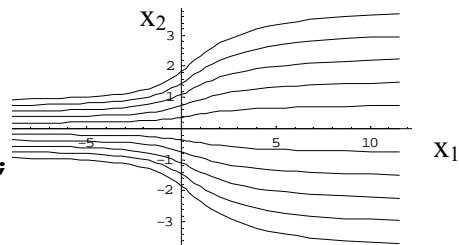
Παρατηρούμε ότι, για  $m > 0$ , ο Ιακωβιανός πίνακας στο πρώτο σημείο ισορροπίας έχει δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές, άρα αυτό είναι σάγμα, ενώ στο δεύτερο έχει δύο αρνητικές ιδιοτιμές, άρα αυτό είναι ευσταθής κόμβος. Παρατηρήστε ότι στο μοναδικό σημείο ισορροπίας που υπάρχει για  $m = 0$ , ο πίνακας έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, άρα το σημείο αυτό δεν είναι υπερβολικό. Το παρακάτω πρόγραμμα σχεδιάζει το **διάγραμμα διακλάδωσης** του συστήματος. Το διάγραμμα αυτό παρουσιάζει τη θέση των σημείων ισορροπίας συναρτήσει του  $m$ . Το ευσταθές σημείο ισορροπίας σχεδιάζεται με συνεχή γραμμή ενώ το ασταθές με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή.

```
x1 = x1 /. sol[[1]]
x11 = x1 /. sol[[2]]
Plot[{x1, x11}, {m, 0, 1},
  PlotStyle -> {{Dashing[{0.05}], RGBColor[1, 0, 0]},
    {Dashing[{}}]}}
```



Το σύστημα αυτό επιλύεται αναλυτικά, συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή DSolve. Το παρακάτω πρόγραμμα βρίσκει τη γενική λύση του συστήματος και με κατάλληλη επιλογή αρχικών συνθηκών σχεδιάζει το φασικό πορτρέτο, για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $m$ . Πρώτα επιλέγουμε την τιμή  $m = -4$  και βρίσκουμε την αντίστοιχη λύση. Κατόπιν υπολογίζουμε διάφορες τροχιές κρατώντας σταθερή την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς  $C[1] = 1$  ενώ μεταβάλλουμε τη  $C[2]$  από  $-5$  έως  $5$ .

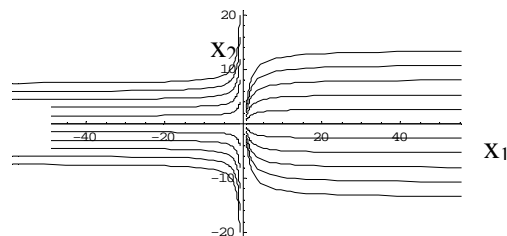
```
eq1 = x1'[t] == m - (x1[t])^2; { {x1[t] -> -2 Tan[2 (t - C[1])], x2[t] -> e^-t C[2] } }
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = -4;
sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]
x1 = x1[t] /. sol1[[1]];
x2 = x2[t] /. sol1[[1]];
ta = Table[{x1 /. {C[1] -> 1}, x2 /. {C[2] -> i}}, {i, -5, 5}];
ParametricPlot[Evaluate[ta], {t, 0.3, 1.7},
  AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι η  $x_1 = -2 \tan\{2(t - C[1])\}$  και  $x_2 = C[2]e^{-t}$ , Δηλαδή το  $x_1$  δεν ορίζεται για τιμές του  $t$  τέτοιες ώστε  $t - C[1] = \pm(2k+1)\pi/4$  όπου  $k$  ακέραιος. Συνεπώς η επιλογή του χρονικού διαστήματος πρέπει να γίνει έτσι ώστε να μην περιέχει τέτοιες τιμές του χρόνου. Παρατηρούμε από το φασικό πορτρέτο ότι δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη λύση για την τιμή  $m = 0$  και σχεδιάζουμε το φασικό πορτρέτο επιλέγοντας κατάλληλες τιμές των σταθερών. Για την τιμή  $t = C[1]$  δεν ορίζεται το  $x_1$ . Όμως το πρόγραμμα παρουσιάζει προβλήματα μόνο αν η τιμή αυτή παρεμβληθεί στο ανοικτό διάστημα τιμών του  $t$  στο οποίο υπολογίζονται οι φασικές τροχιές.

```
eq1 = x1'[t] == m - (x1[t])^2; { {x1[t] -> 1/(t - C[1]), x2[t] -> e^-t C[2] } }
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = 0;
sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]
x1 = x1[t] /. sol1[[1]];
x2 = x2[t] /. sol1[[1]];
ta = Table[{x1 /. {C[1] -> -1}, x2 /. {C[2] -> i}}, {i, -5, 5}];
ta1 = Table[{x1 /. {C[1] -> 1}, x2 /. {C[2] -> 4 i}}, {i, -5, 5}];
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[ta], {t, -1, 0.3},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[ta1], {t, 0, 1},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Το σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$  είναι μη υπερβολικό. Οι φασικές τροχιές στο δεξιό ημιεπίπεδο τείνουν όλες ασυμπτωτικά στο σημείο αυτό και αυτή η συμπεριφορά μοιάζει με κόμβο. Αντίθετα, οι τροχιές στο αριστερό ημιεπίπεδο συμπεριφέρονται όπως όταν το σημείο  $(0,0)$  είναι σάγμα και ο άξονας  $x_2$  η ασταθής πολλαπλότητα. Για αυτό το λόγο, το σημείο αυτό ονομάζεται **σάγμα - κόμβος**.

Στη συνέχεια επιλέγουμε την τιμή  $m = 1$  και βρίσκουμε τη λύση

```
eq1 = x1'[t] == m - (x1[t])^2;
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = 1;
sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]
```

$$\left\{ \left\{ x1[t] \rightarrow \frac{e^{2t} + e^{2C[1]}}{e^{2t} - e^{2C[1]}}, x2[t] \rightarrow e^{-t} C[2] \right\} \right\}$$

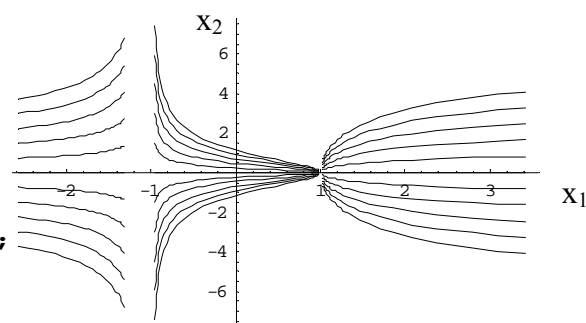
Παρατηρούμε ότι, στη μορφή που πήραμε τη λύση, για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τροχιές για τιμές  $-1 < x_1(0) < 1$ , ο όρος  $e^{2C[1]}$  πρέπει να είναι αρνητικός, πράγμα που σημαίνει ότι η σταθερά  $C[1]$  πρέπει να πάρει μιγαδικές τιμές. Για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία, μετασχηματίζουμε τη λύση θέτοντας  $e^{2C[1]} = c$ .

$$= x1[t] /. sol1[[1]] /. \{C[1] \rightarrow 1/2 \text{Log}[c]\} \quad \frac{c + e^{2t}}{-c + e^{2t}}$$

Κατόπιν σχεδιάζουμε το φασικό πορτρέτο με κατάλληλη επιλογή τιμών των αυθαιρέτων σταθερών:

```
x1 = x1[t] /. sol1[[1]];
x2 = x2[t] /. sol1[[1]];
ta = Table[{x1 /. {C[1] -> -0.1}, x2 /. {C[2] -> i}},
  {i, -5, 5}];
ta1 = Table[{x1 /. {C[1] -> 0.01}, x2 /. {C[2] -> 0.5 i}},
  {i, -5, 5}];
ta2 = Table[{xx /. {c -> -19}, x2 /. {C[2] -> i}}, {i, -5, 5}];

gr1 = ParametricPlot[Evaluate[ta], {t, 0.2, 2},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[ta1], {t, -1, -0.4},
  DisplayFunction -> Identity];
gr3 = ParametricPlot[Evaluate[ta2], {t, -0.4, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2, gr3}, AxesOrigin -> {0, 0},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Υπάρχει ένα σάγμα στο  $(-1, 0)$  και ένας ευσταθής κόμβος στο  $(1, 0)$ . Και τα δύο σημεία ισορροπίας είναι υπερβολικά.

## 2. Υποκρίσιμη διακλάδωση

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= mx_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

όπου  $m$  σταθερή παράμετρος. Το παραπάνω σύστημα για την τιμή της παραμέτρου  $m = 0$  παρουσιάζει **υποκρίσιμη** (transcritical) **διακλάδωση**. Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & x_2 &= 0 \\ x_1 &= m, & x_2 &= 0\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για  $m = 0$  τα δύο σημεία ισορροπίας συμπίπτουν σε ένα στο  $(0, 0)$ , ενώ για  $m \neq 0$  έχει δύο σημεία ισορροπίας. Το παρακάτω πρόγραμμα προσδιορίζει τα σημεία αυτά και το είδος της γραμμικής τους ευστάθειας:

**f1 = m**

$\{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0\}, \{x_1 \rightarrow m, x_2 \rightarrow 0\}$

**sol = Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}]**

**Ja[x1\_, x2\_] = {{D[f1, x1], D[f1, x2]},  
{D[f2, x1], D[f2, x2]}};**

$\{m, 0\}, \{0, -1\}$

**A1 = Ja[0, 0]**

$\{-1, m\}$

**Eigenvalues[A1]**

$\{-m, 0\}, \{0, -1\}$

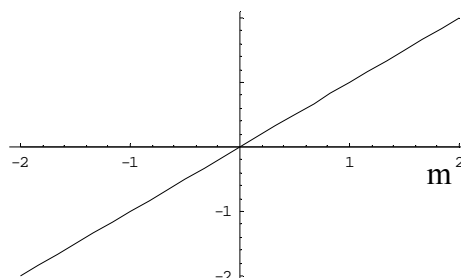
**A2 = Ja[m, 0]**

$\{-1, -m\}$

**Eigenvalues[A2]**

Παρατηρούμε ότι, για  $m > 0$ , ο Ιακωβιανός πίνακας στο σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$  έχει δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές, άρα αυτό είναι σάγμα, ενώ στο δεύτερο, στον αρνητικό ημιάξονα του  $x_1$ , έχει δύο πραγματικές αρνητικές ιδιοτιμές, άρα αυτό είναι ευσταθής κόμβος. Για  $m < 0$ , ο Ιακωβιανός πίνακας στο  $(0,0)$  έχει δύο πραγματικές αρνητικές ιδιοτιμές, άρα αυτό είναι ευσταθής κόμβος, ενώ το δεύτερο βρίσκεται τώρα στο θετικό ημιάξονα και ο πίνακας έχει δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές, άρα το σημείο αυτό είναι σάγμα. Στο μοναδικό σημείο ισορροπίας που υπάρχει για  $m = 0$  και είναι το  $(0,0)$ , ο πίνακας έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, άρα το σημείο αυτό δεν είναι υπερβολικό. Το παρακάτω πρόγραμμα σχεδιάζει το διάγραμμα διακλάδωσης του συστήματος, που παρουσιάζει τη θέση  $x_1$ , των σημείων ισορροπίας συναρτήσει του  $m$ .

**Plot[{x1, x11}, {m, -2, 2}]**



Και αυτό το σύστημα επιλύεται αναλυτικά, συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πάλι την εντολή DSolve. Το παρακάτω πρόγραμμα βρίσκει τη γενική λύση του συστήματος για αυθαίρετη τιμή της παραμέτρου  $m$ .

**sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]**

**xx = x1[t] /. sol1[[1]] /.**

$\left\{ \left\{ x_1[t] \rightarrow \frac{e^{mt+mC[1]} m}{-1 + e^{mt+mC[1]}}, x_2[t] \rightarrow e^{-t} C[2] \right\} \right\}$

Προσέξτε ότι η παραπάνω λύση δεν ισχύει για  $m = 0$ . Στη συνέχεια βρίσκουμε αναλυτικά τη λύση για  $m = -1$ . Για να δώσουμε αρχικές συνθήκες ώστε  $-1 < x_1(0) < 0$ , θα πρέπει πάλι η σταθερά  $C[1]$  να πάρει μιγαδικές τιμές. Για να το αποφύγουμε, κάνουμε και την αντικατάσταση  $C[1] = \log c$ .

**xx = m [ ] ( [ ] )  
x2[t];**

$\left\{ \left\{ [ ] \frac{c}{e^t - e^{C[1]}} [ ] \right\} \right\}$

**m = -1;**

**sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]**

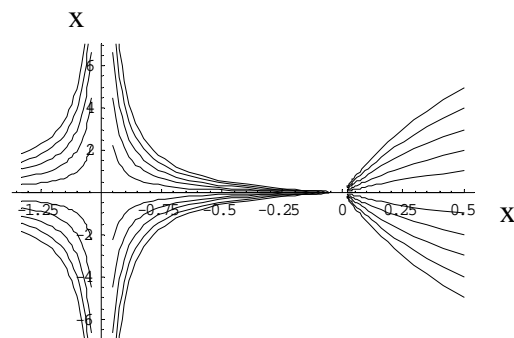
**xx = x1[t] /. sol1[[1]] /. {C[1] → Log[c]}**

$\frac{c}{-c + e^t}$

Σχηματίζουμε πίνακες με επιλογή καταλλήλων τιμών των αυθαίρετων σταθερών και σχεδιάζουμε το φασικό πορτρέτο

```
x1 = x1[t] /. sol1[[1]];
x2 = x2[t] /. sol1[[1]];
ta1 = Table[{x1 /. {C[1] → 2.398}, x2 /. {C[2] → i}},
  {i, -5, 5}];
ta2 = Table[{x1 /. {C[1] → -1.0986}, x2 /. {C[2] → i}},
  {i, -5, 5}];
ta3 = Table[{xx /. {c → -9}, x2 /. {C[2] → i}}, {i, -5, 5}];
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[ta1], {t, -0.8, 1},
  DisplayFunction → Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[ta2], {t, 0, 3},
  DisplayFunction → Identity];
```

```
gr3 = ParametricPlot[Evaluate[ta3], {t, -0.8, 5},
  DisplayFunction → Identity];
Show[{gr1, gr2, gr3}, AxesOrigin → {-1, 0},
  DisplayFunction → $DisplayFunction]
```

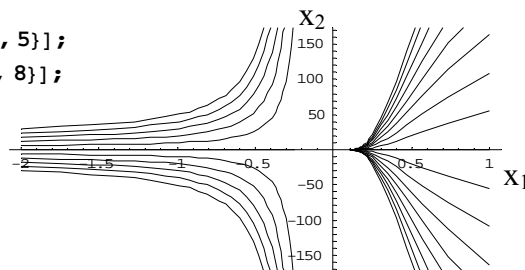


Επαναλαμβάνουμε την ίδια εργασία για την περίπτωση  $m = 0$ .

```
eq1 = x1'[t] == m x1[t] - x1[t]^2;
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = 0;
sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]
x1 = x1[t] /. sol1[[1]];
x2 = x2[t] /. sol1[[1]];
```

$$\left\{ \left\{ x1[t] \rightarrow \frac{1}{t - C[1]}, x2[t] \rightarrow e^{-t} C[2] \right\} \right\}$$

```
ta = Table[{x1 /. {C[1] → 1}, x2 /. {C[2] → i 10}}, {i, -5, 5}];
ta1 = Table[{x1 /. {C[1] → -5}, x2 /. {C[2] → i}}, {i, -8, 8}];
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[ta], {t, -3, 0.5},
  DisplayFunction → Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[ta1], {t, -4, 5},
  DisplayFunction → Identity];
Show[{gr1, gr2}, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```



Το μοναδικό μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$  είναι σάγμα – κέντρο.

Τέλος επιλέγουμε τη θετική τιμή  $m = 1$  και ξαναβρίσκουμε τη λύση

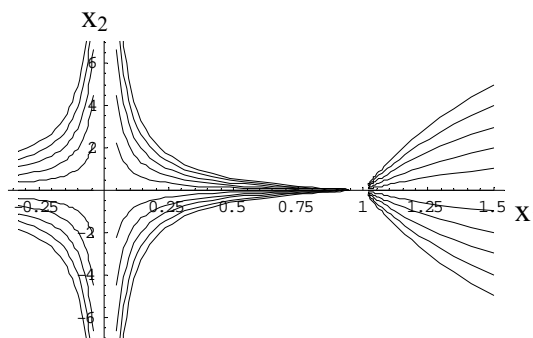
```

eq1 = x1'[t] == m x1[t] - (x1[t])^2;
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = 1;
sol1 = DSolve[{eq1, eq2}, {x1[t], x2[t]}, t]
xx = x1[t] /. sol1[[1]] /. {C[1] -> Log[c]}

x1 = x1[t] /. sol1[[1]];
x2 = x2[t] /. sol1[[1]];
ta1 = Table[{x1 /. {C[1] -> 2.398}, x2 /. {C[2] -> i}},
  {i, -5, 5}];
ta2 = Table[{x1 /. {C[1] -> -1.0986}, x2 /. {C[2] -> i}},
  {i, -5, 5}];
ta3 = Table[{xx /. {c -> -9}, x2 /. {C[2] -> i}}, {i, -5, 5}];

gr1 = ParametricPlot[Evaluate[ta1], {t, -0.8, 1},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[ta2], {t, 0, 3},
  DisplayFunction -> Identity];
gr3 = ParametricPlot[Evaluate[ta3], {t, -0.8, 5},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2, gr3}, AxesOrigin -> {0, 0},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]

```



### 3. Διακλάδωση διχάλας

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= mx_1 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

όπου  $m$  σταθερή παράμετρος. Το παραπάνω σύστημα για την τιμή της παραμέτρου  $m = 0$  παρουσιάζει **διακλάδωση διχάλας** (pitchfork). Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, x_2 = 0, \\ x_1 &= \sqrt{m}, x_2 = 0, \\ x_1 &= -\sqrt{m}, x_2 = 0.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για  $m < 0$  έχουμε ένα σημείο ισορροπίας, το  $(0,0)$ , για  $m = 0$  όλα τα σημεία ισορροπίας συμπίπτουν σε ένα στο  $(0,0)$ , ενώ για  $m > 0$  έχουμε τρία σημεία ισορροπίας.

Το παρακάτω πρόγραμμα προσδιορίζει τα σημεία αυτά και το είδος της γραμμικής τους ευστάθειας:

```

f1 = m x1 - x1^3;
f2 = -x2;
sol = Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}] {{x1 -> 0, x2 -> 0}, {x2 -> 0, x1 -> -Sqrt[m]}, {x2 -> 0, x1 -> Sqrt[m]}}

Ja[x1_, x2_] = {{D[f1, x1], D[f1, x2]},
                 {D[f2, x1], D[f2, x2]}};
A1 = Ja[0, 0]
Eigenvalues[A1]
A2 = Ja[Sqrt[m], 0]
Eigenvalues[A2]
A3 = Ja[-Sqrt[m], 0]
Eigenvalues[A3]

```

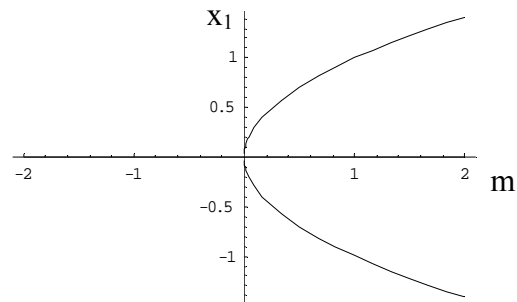
$$\begin{aligned} & \{\{m, 0\}, \{0, -1\}\} \\ & \{-1, m\} \\ & \{\{-2m, 0\}, \{0, -1\}\} \\ & \{-1, -2m\} \\ & \{\{-2m, 0\}, \{0, -1\}\} \\ & -1, -2m \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για  $m < 0$  το μοναδικό σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  είναι ευσταθής κόμβος, ενώ μόλις το  $m$  γίνει θετικό, το σημείο αυτό γίνεται σάγμα (δηλαδή ασταθές σημείο) και συγχρόνως εμφανίζονται τα δύο άλλα σημεία ισορροπίας, τα οποία είναι ευσταθείς κόμβοι. Η διακλάδωση αυτή ονομάζεται διακλάδωση διχάλας. Παρακάτω σχεδιάζουμε το διάγραμμα διακλάδωσης, δηλαδή τη θέση  $x_1$  των σημείων ισορροπίας συναρτήσει του  $m$ .

```

x1 = x1 /. sol[[1]];
x11 = x1 /. sol[[2]];
x12 = x1 /. sol[[3]];
Plot[{x1, x11, x12}, {m, -2, 2}]

```



Το σύστημα αυτό δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τις συναρτήσεις που διαθέτει η Mathematica, συνεπώς χρησιμοποιούμε την εντολή NDSolve για την αριθμητική του επίλυση, επιλέγοντας πρώτα την τιμή  $m = 1$

```
eq1 = x1'[t] == m x1[t] - x1[t]^3;
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = -1;
sol1 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == i, x2[0] == 2},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 4}], {i, -1, 1, 0.2}];
```

sol1 =

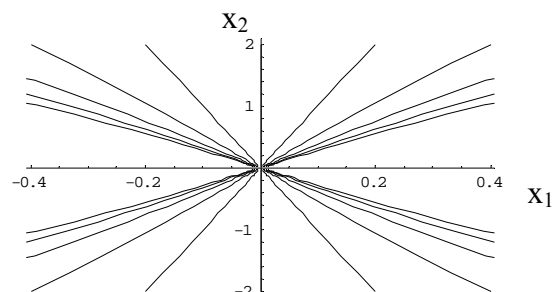
```
Table[{x1 = x1[t] /. sol1[[i]], x2 = x2[t] /. sol1[[i]]},
  {i, 1, Length[sol1]}];
```

```
sol2 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == i, x2[0] == -2},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 4}], {i, -1, 1, 0.2}];
```

sol2 =

```
Table[{x11 = x1[t] /. sol2[[i]], x21 = x2[t] /. sol2[[i]]},
  {i, 1, Length[sol2]}];
```

```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[sol1], {t, 0, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[sol2], {t, 0, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Παρατηρήστε ότι σχηματίσαμε δύο πίνακες, ένα με  $x_2(0) = 2$  και ένα με  $x_2(0) = -2$ . Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το φασικό πορτρέτο χρησιμοποιώντας τις εντολές ParametricPlot και Show. Παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθής κόμβος. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη λύση για την περίπτωση  $m = 0$  και σχεδιάζουμε το φασικό πορτρέτο.

```
eq1 = x1'[t] == m x1[t] - x1[t]^3;
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = 0;
sol1 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == i, x2[0] == 2},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 16}], {i, -1, 1, 0.2}];
```

sol1 =

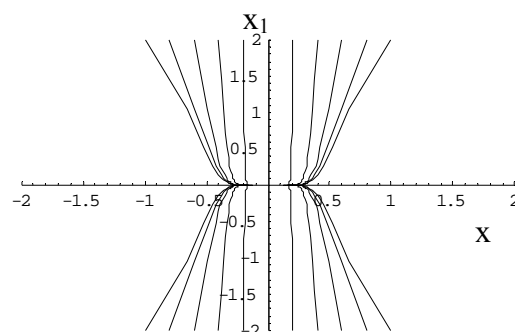
```
Table[{x1 = x1[t] /. sol1[[i]], x2 = x2[t] /. sol1[[i]]},
  {i, 1, Length[sol1]}];
```

```
sol2 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == i, x2[0] == -2},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 16}], {i, -1, 1, 0.2}];
```

sol2 =

```
Table[{x11 = x1[t] /. sol2[[i]], x21 = x2[t] /. sol2[[i]]},
  {i, 1, Length[sol2]}];
```

```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[sol1], {t, 0, 16},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[sol2], {t, 0, 16},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Το σημείο (0,0) είναι μη γραμμικός ευσταθής κόμβος (μη υπερβολικό σημείο του οποίου το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα είναι ευσταθής κόμβος). Τέλος υπολογίζουμε τη λύση και σχεδιάζουμε το φασικό πορτρέτο για τη θετική τιμή  $m = 1$ .

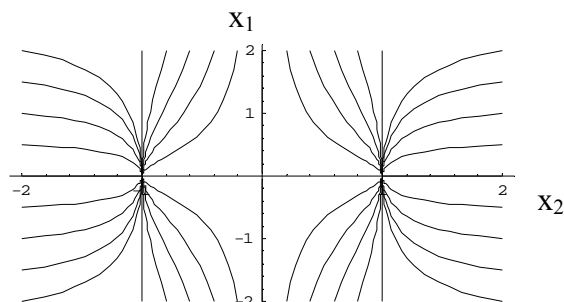
```
eq1 = x1'[t] == m x1[t] - x1[t]^3;
eq2 = x2'[t] == -x2[t];
m = 1;
sol1 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == i, x2[0] == 2},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 4}], {i, -1, 1, 0.2}];
sol1 =
  Table[{x1 = x1[t] /. sol1[[i]], x2 = x2[t] /. sol1[[i]]},
    {i, 1, Length[sol1]}];
```



```
sol2 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == i, x2[0] == -2},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 4}], {i, -1, 1, 0.2}];
sol2 =
  Table[{x11 = x1[t] /. sol2[[i]], x21 = x2[t] /. sol2[[i]]},
    {i, 1, Length[sol2]}]
sol3 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == -2, x2[0] == i},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 4}], {i, -2, 2, 0.5}];
sol3 =
  Table[{x12 = x1[t] /. sol3[[i]], x22 = x2[t] /. sol3[[i]]},
    {i, 1, Length[sol3]}];
sol4 = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == 2, x2[0] == i},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 4}], {i, -2, 2, 0.5}];
sol4 =
  Table[{x13 = x1[t] /. sol4[[i]], x23 = x2[t] /. sol4[[i]]},
    {i, 1, Length[sol4]}];
```

Σχηματίζουμε τέσσερις διαφορετικούς πίνακες. Οι δύο πρώτοι αντιστοιχούν σε  $x_2(0) = \pm 2$  και οι δύο επόμενοι σε  $x_1(0) = \pm 2$ .

```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[sol1], {t, 0, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
gr2 = ParametricPlot[Evaluate[sol2], {t, 0, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
gr3 = ParametricPlot[Evaluate[sol3], {t, 0, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
gr4 = ParametricPlot[Evaluate[sol4], {t, 0, 4},
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr1, gr2, gr3, gr4}, AxesOrigin -> {0, 0},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Στα σημεία  $(\pm 1, 0)$  υπάρχουν δύο ευσταθείς κόμβοι ενώ το  $(0, 0)$  είναι σάγμα.

#### 4. Διακλάδωση Hopf

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(m - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(m - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

όπου  $m$  σταθερή παράμετρος. Το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το  $(0, 0)$ , το οποίο, όπως θα διαπιστώσουμε, για  $m < 0$  είναι ευσταθής εστία, ενώ για  $m > 0$  γίνεται ασταθής εστία και συγχρόνως εμφανίζεται ένας ευσταθής **οριακός κύκλος**. Η διακλάδωση αυτή ονομάζεται **διακλάδωση Hopf**.

Το παρακάτω πρόγραμμα βρίσκει τα σημεία ισορροπίας και τη γραμμική ευστάθεια:

```
f1 = -x2 + x1 (m - x1^2 - x2^2);
f2 = x1 + x2 (m - x1^2 - x2^2);
Solve[{f1 == 0, f2 == 0}, {x1, x2}]
Ja[x1_, x2_] = {{D[f1, x1], D[f1, x2]},
  {D[f2, x1], D[f2, x2]}};
A1 = Ja[0, 0]
Eigenvalues[A1]
```

{{x1 -> 0, x2 -> 0}}  
{{m, -1}, {1, m}}  
{-i + m, i + m}

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα είναι μιγαδικές συζυγείς, ενώ το πρόσημο του πραγματικού τους μέρους είναι αυτό του  $m$ . Συνεπώς, όταν  $m < 0$ , το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  είναι ευσταθής εστία, ενώ όταν  $m > 0$ , το σημείο αυτό είναι ασταθής εστία. Για  $m = 0$  οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές και στο γραμμικοποιημένο σύστημα αντιστοιχεί σε κέντρο. Όμως το σημείο είναι μη υπερβολικό και το θεώρημα Hartman – Grobman δεν ισχύει. Το σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος εξακολουθεί να είναι ευσταθής εστία. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι για θετικό  $m$  υπάρχει οριακός κύκλος ως εξής: Γράφουμε τις εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(m - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση έχει την προφανή λύση  $r^2 = m = \text{σταθ.}$  Η λύση αυτή είναι μία κλειστή περιοδική τροχιά, που παριστάνεται στο χώρο φάσης από ένα κύκλο ακτίνας  $\sqrt{m}$ .

Το σύστημα δε μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και χρησιμοποιούμε πάλι την NDSolve. Εργαζόμαστε πρώτα για μια αρνητική τιμή, π.χ.  $m = -0.01$ .

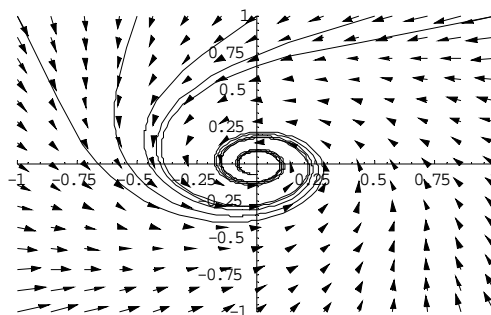
```
eq1 = x1'[t] == -x2[t] + x1[t] (m - x1[t]^2 - x2[t]^2);
eq2 = x2'[t] == x1[t] + x2[t] (m - x1[t]^2 - x2[t]^2);
m = -0.1;
sol = Table[NDSolve[{eq1, eq2, x1[0] == 0.5 i, x2[0] == 1},
  {x1[t], x2[t]}, {t, 0, 15}], {i, -2, 2}];
sol = Table[{x1 = x1[t] /. sol[[i]], x2 = x2[t] /. sol[[i]]},
  {i, 1, 5}];
```

Το παρακάτω πρόγραμμα σχεδιάζει το διανυσματικό πεδίο και το πορτρέτο του χώρου φάσεων.

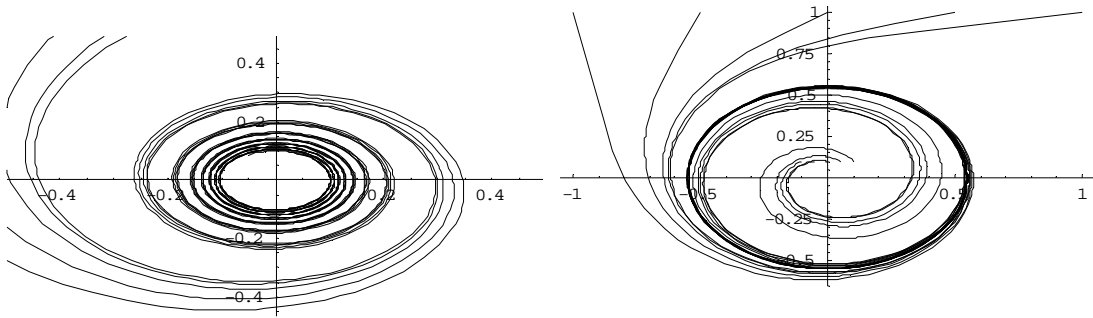
```
<< Graphics`PlotField`
gr2 = PlotVectorField[
  {-x2 + x1 (m - x1^2 - x2^2),
   x1 + x2 (m - x1^2 - x2^2)}, {x1, -1, 1},
  {x2, -1, 1}, DisplayFunction -> Identity];

gr1 = ParametricPlot[Evaluate[sol], {t, 0, 15},
  DisplayFunction -> Identity];

Show[{gr1, gr2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



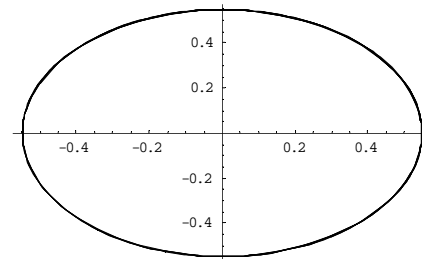
Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την εργασία για  $m = 0$  και παίρνουμε το φασικό πορτρέτο του σχήματος 11 (αριστερά). Παρατηρούμε ότι η ασυμπτωτική σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας είναι πολύ βραδύτερη. Τέλος επιλέγουμε την θετική τιμή  $m = 0.3$  και υπολογίζουμε τις φασικές τροχιές για δύο ομάδες αρχικών συνθηκών, μία στο εξωτερικό και μία στο εσωτερικό του οριακού κύκλου. Το αντίστοιχο φασικό πορτρέτο παρουσιάζεται στο σχήμα 11 (δεξιά).



**Σχήμα 11.** Φασικό πορτρέτο για  $m=0$ . Τροχιές που τείνουν σε οριακό κύκλο για  $m=0.3$

Όλες οι τροχιές συγκλίνουν ασυμπτωτικά στον κύκλο  $r = \sqrt{m} \approx 0.548$  ο οποίος είναι ο ευσταθής οριακός κύκλος του συστήματος. Για να δούμε καλύτερα τον οριακό κύκλο μπορούμε να τρέξουμε το παραπάνω πρόγραμμα μόνο για τις εξωτερικές τροχιές (το gr1) και να σχεδιάσουμε μόνο την ασυμπτωτική συμπεριφορά των φασικών τροχιών, για μεγάλους χρόνους, παραλείποντας την παροδική συμπεριφορά για χρόνους μικρότερους του  $t = 10$ .

```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[sol], {t, 10, 20}];
```



**Κεφάλαιο 6ο****Μη Αυτόνομα Συστήματα Ενός Βαθμού Ελευθερίας.****6.1 Εισαγωγή**

Όπως αναφέρθηκε στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο ένα σύστημα χαρακτηρίζεται μη αυτόνομο όταν στις εξισώσεις του υπάρχει ο χρόνος (δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή των διαφορικών εξισώσεων). Έτσι για έναν βαθμό ελευθερίας θα έχουμε το σύστημα

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t), \quad \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 \quad (44)$$

ή ισοδύναμα

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = f(x, p, t) \quad (45)$$

Αν στο δεύτερο μέλος της (44) δεν υπάρχει η μεταβλητή  $\dot{x}$  (ή η  $p$  στην (45)) το σύστημα είναι Χαμιλτονιανό (και κατά συνέπεια διατηρητικό) με συνάρτηση Hamilton την

$$H(x, p) = \frac{1}{2} p^2 + U(x, t), \quad U = - \int f(x, t) dx \quad (46)$$

Έτσι οι κανονικές εξισώσεις  $\dot{x} = \partial H / \partial p$ ,  $\dot{p} = -\partial H / \partial x$  συμπίπτουν με τις (45). Αν  $\partial f / \partial \dot{x} \neq 0$  το σύστημα είναι μη διατηρητικό.

Για τα μη αυτόνομα συστήματα ορίζεται ο επεκτεταμένος χώρος φάσεων που συμπεριλαμβάνει και τον άξονα του χρόνου. Για το σύστημα (44) ο χώρος αυτός είναι ο τρισδιάστατος χώρος  $txp$ . Από κάθε σημείο του χώρου αυτού περνάει μια και μόνο λύση του συστήματος. Ο χώρος  $xp$  (δηλαδή ο χώρος φάσεων του αυτόνομου συστήματος) είναι μια προβολή του επεκτεταμένου χώρου φάσεων όπου οι τροχιές εν γένει τέμνονται.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με το σύστημα της μορφής

$$\ddot{x} = ax - bx^3 - d\dot{x} + f \cos t \quad (47)$$

όπου  $a, b, d$  και  $f$  πραγματικές παράμετροι του συστήματος. Για  $b=0$  η (47) είναι γραμμική και, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η δυναμική της γίνεται πλήρως γνωστή μέσα από τις αναλυτικές της λύσεις. Για  $b \neq 0$  το σύστημα γίνεται μη γραμμικό λόγω της ύπαρξης του κυβικού όρου  $x^3$  και η συμπεριφορά του συστήματος αλλάζει σημαντικά παρουσιάζοντας νέα δυναμικά χαρακτηριστικά.

**6.2 Γραμμικές περιπτώσεις**

Θεωρώντας  $b=0$ , μπορούμε να μελετήσουμε το σύστημα με τον παρακάτω κώδικα, όπου γίνεται χρήση των αναλυτικών λύσεων που προκύπτουν από την `Dsolve` (**Πρόγραμμα 6.1α**)

```
Clear["Global`*"]
a = -1; b = 0; d = 0; f = 0;
deq1 = x'[t] == p[t];
deq2 = p'[t] == a x[t] - b x[t]^3 - d p[t] + f Cos[t];
sol = DSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0, p[0] == p0}, {x[t], p[t]}, t] // FullSimplify
ic = {x0 -> ??, p0 -> ??}
xx[t_] = x[t] /. sol[[1]] /. ic
pp[t_] = p[t] /. sol[[1]] /. ic
Plot[xx[t], {t, 0, 100}]
Plot[pp[t], {t, 0, 100}]
ParametricPlot[{xx[t], pp[t]}, {t, 0, 100};
```

Στη θέση των συμβόλων ?? εισάγουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους και τις αρχικές συνθήκες  $x(0)$  και  $p(0)$ .

Εξετάζουμε την (47) με  $b=0$  για τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις

α)  $a < 0, d=f=0$ . Το σύστημα γίνεται ο αρμονικός ταλαντωτής  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , όπου  $\omega = |a|^{1/2}$  η κυκλική συχνότητα. Το  $x$  εκτελεί περατωμένες ταλαντώσεις που δίνονται από την γενική λύση

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{\omega} \sin \omega t, & x_0 &= x(0), & p_0 &= p(0) \\ p(t) &= p_0 \cos \omega t + \omega x_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (48)$$

και το φασικό διάγραμμα  $xp$  είναι αυτό του παραδείγματος 2-1.

β) Επιβάλλουμε στο παραπάνω σύστημα απώλειες θέτοντας  $d > 0$ . Το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - d\dot{x} \quad (49)$$

με σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$  και με γενική λύση

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4\omega^2}}{2}, \quad \text{για } d \neq 2\omega \quad (50)$$

Παρατηρούμε ότι για  $d > 2\omega$  (μεγάλη τριβή) οι  $r_1$  και  $r_2$  είναι πραγματικές και αρνητικές και το σημείο ισορροπίας γίνεται ευσταθής κόμβος. Για  $d < 2\omega$  (μικρή τριβή) οι  $r_1$  και  $r_2$  είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος και το σημείο ισορροπίας γίνεται ευσταθής εστία. Και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0 \quad (51)$$

γ) Θεωρούμε τον αρμονικό ταλαντωτή χωρίς τριβές ( $d=0$ ) αλλά με εξωτερική διέγερση ( $f \neq 0$ )

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \cos t \quad (52)$$

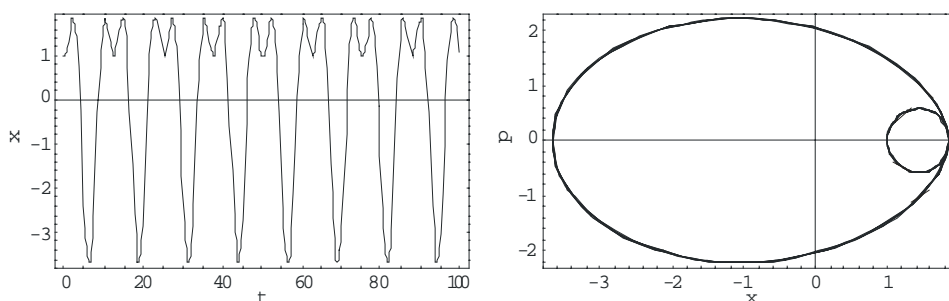
Η (52) είναι γραμμική μη ομογενής και για  $\omega \neq 1$  έχει γενική λύση την

$$x(t) = x_a(t; \omega) + A_1 \cos t + A_2 \sin t, \quad A_i = A_i(\omega, f) \quad (53)$$

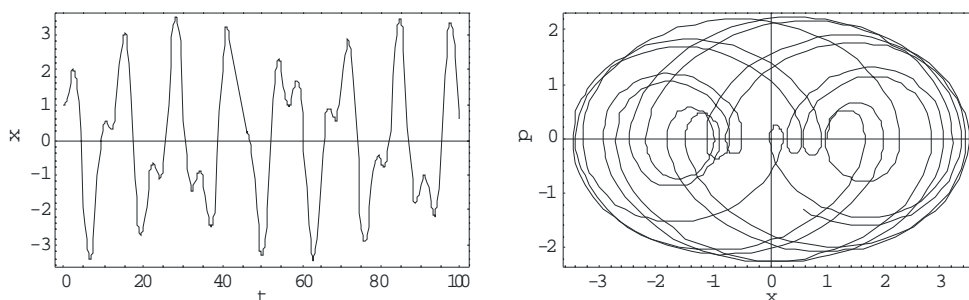
όπου  $x_a(t, \omega)$  η περιοδική λύση του αρμονικού ταλαντωτή. Η (53) εκφράζει περατωμένες ταλαντώσεις με δύο κυκλικές συχνότητες  $\omega_1 = \omega$  και  $\omega_2 = 1$ . Αν  $\omega_1 = \mu/\nu \in \mathbf{Q}$  ( $\mu, \nu$  πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι) τότε έχουμε

$$x(t) = x(t + 2\pi\nu) \quad (54)$$

δηλαδή η κίνηση είναι **περιοδική** με περίοδο  $T = 2\pi\nu$  και ονομάζεται τροχιά “**περιόδου  $\nu$** ”. Αν όμως το  $\omega_1$  είναι άρρητος η τροχιά καλείται **ημιπεριοδική** και η προβολή της στο χώρο  $xp$  δεν κλείνει αλλά γεμίζει πυκνά μια περιοχή του καθώς  $t \rightarrow \infty$ .



**Σχήμα 12** Περιοδική τροχιά περιόδου 2 ( $T=4\pi$ ) του συστήματος (52) για  $\omega=1/2$  ( $a=-1/4$ ) και  $f=1$ .



**Σχήμα 13** Ημι-περιοδική τροχιά (για 100 χρονικές μονάδες) του συστήματος (52) για  $\omega=1/\sqrt{5}$  ( $a=-1/5$ ) και  $f=1$ .

δ) Στην τελευταία περίπτωση θεωρούμε όλους τους γραμμικούς όρους της (47) με  $a < 0$ ,  $d > 0$ ,  $f \neq 0$ :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - d\dot{x} + f \cos t \quad (55)$$

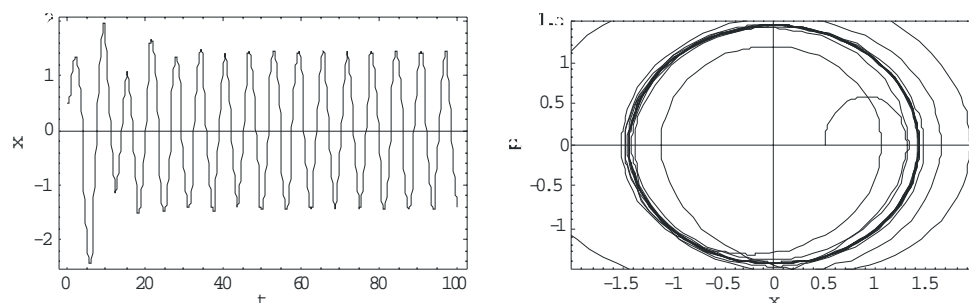
Η γενική λύση της (55) γράφεται ως

$$x(t) = x_d(t) + A_1 \cos t + A_2 \sin t, \quad A_i = A_i(\omega, f, d) \quad (56)$$

όπου  $x_d(t)$  η λύση του ομογενούς μέρους της (55) που είναι της μορφής (50). Αφού η  $x_d(t)$  τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, θα έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = A_1 \cos t + A_2 \sin t \quad (57)$$

Δηλαδή οι λύσεις της (55) τείνουν να γίνουν περιοδικές με περίοδο  $T=2\pi$  (περίοδος εξωτερικής διέγερσης). Στο χώρο  $xp$  οι τροχιές γενικά τείνουν σε ένα κύκλο με ακτίνα  $R=A_1^2+A_2^2$  που εξαρτάται από τις παραμέτρους του συστήματος. Έχουμε, λοιπόν την παρουσία ευσταθούς οριακού κύκλου με κέντρο το  $(0,0)$  για κάθε τιμή των παραμέτρων (στο διάστημα που τις ορίσαμε).

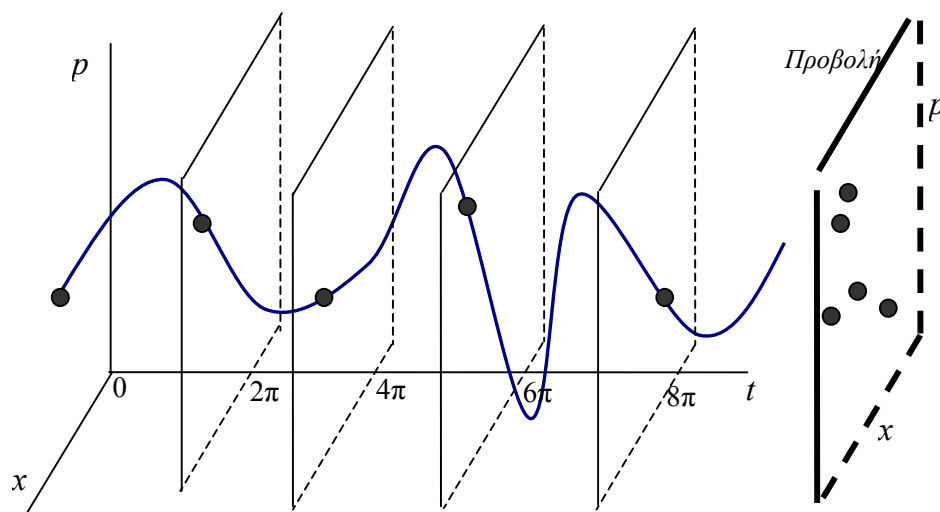


**Σχήμα 14** Τροχιά (για 100 χρονικές μονάδες) του συστήματος (55) για  $a=-1/3$ ,  $d=1/5$  και  $f=1$ . Η τροχιά ξεκινάει από τη θέση  $x(0)=0.5$  και  $p(0)=0$  και τείνει σε οριακό κύκλο καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### 6.3. Η τομή Poincare

Για τα μη αυτόνομα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο (περιπτώσεις γ και δ), οι τροχιές στο χώρο  $xp$ , που αποτελεί προβολή του επεκτεταμένου χώρου φάσεων, γενικά τέμνονται είτε με τον εαυτό τους ή με άλλες τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Έτσι ο παραπάνω χώρος δεν δίνει μια σωστή εποπτεία της δυναμικής του συστήματος. Η **τομή Poincare** (ή απεικόνιση Poincare) ορίζεται και πάλι από το επίπεδο  $xp$  αλλά απεικονίζονται σε αυτό μόνο τα σημεία της τροχιάς που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές  $t=kT_\delta$ ,  $k=0,1,2,\dots$ , όπου  $T_\delta$  η περίοδος της εξωτερικής διέγερσης που για το σύστημα (47) είναι ίση με  $2\pi$ . Άρα η τομή Poincare αποτελείται από τα σημεία

$$P_k = (x_k, p_k), \quad x_k = x(t_k), \quad p_k = p(t_k), \quad t_k = 2k\pi \quad (58)$$



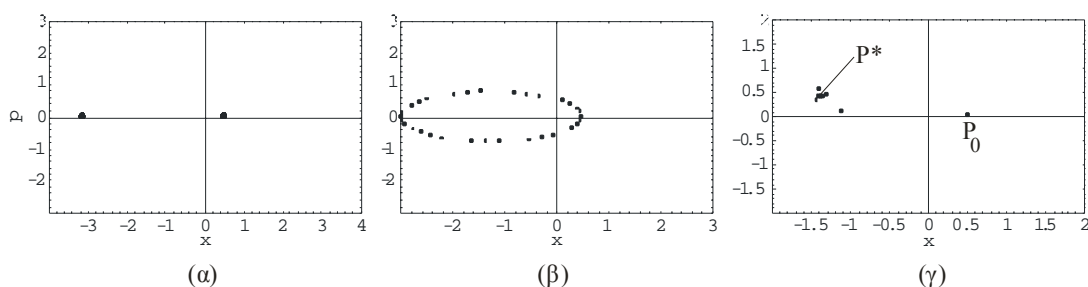
**Σχήμα 15** Τομή Poincare. Τα σημεία της τροχιάς που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές  $t=2k\pi$  προβάλλονται σε ένα επίπεδο  $xp$ .

Σε συνέχεια του προγράμματος 6.1α, τα σημεία της τομής Poincare μπορούν να υπολογιστούν άμεσα με τον παρακάτω κώδικα, όπου αποθηκεύονται σε μια λίστα (ldata) και στη συνέχεια απεικονίζονται γραφικά. Στην παράμετρο Npoints εισάγουμε τον αριθμό των σημείων που θα σχεδιαστούν.

**(Πρόγραμμα 6.1β)**

```
Npoints = ?? ;
ldata = {}
For[k = 0, k ≤ Npoints, k++, T = 2 * π * k; AppendTo[ldata, {xx[T], pp[T]}];]
ListPlot[ldata, AxesLabel -> {"x", "p"}]
```

Μια απλή περιοδική τροχιά (περιόδου 1 ή  $T=2\pi$ ) απεικονίζεται στην τομή Poicare με ένα σημείο. Μια περιοδική τροχιά περιόδου  $\nu$  ( $T=2\nu\pi$ ) απεικονίζεται με  $\nu$  σημεία (σχήμα 5α). Μια ημιπεριοδική τροχιά απεικονίζεται με έναν άπειρο αριθμό σημείων που σχηματίζουν για  $t \rightarrow \infty$  μια κλειστή καμπύλη που ονομάζεται **αναλλοίωτος κύκλος** (σχήμα 5β). Μια τροχιά που τείνει προς έναν οριακό κύκλο περιόδου 1, απεικονίζεται από έναν άπειρο αριθμό σημείων τα οποία όμως τείνουν προς ένα σημείο  $P^*$  που αντιστοιχεί στον οριακό κύκλο (σχήμα 5γ). Αν ο οριακός κύκλος είναι περιόδου  $\nu$  τότε τα αντίστοιχα σημεία του στην τομή τείνουν σε  $\nu$  σημεία.



**Σχήμα 16.** Τομές Poincare που αντιστοιχούν α) στην περιοδική τροχιά περιόδου 2 του σχήματος 1 β) στην ημιπεριοδική τροχιά του σχήματος 2 (μόνο 30 σημεία. Για  $t \rightarrow \infty$  τα σημεία πυκνώνουν και σχηματίζουν μια αναλλοίωτη κλειστή καμπύλη) γ) στην τροχιά του σχήματος 3 που τείνει σε οριακό κύκλο. Μετά τα πέντε πρώτα σημεία που φαίνονται διασκορπισμένα, η τροχιά τέμνει την τομή σχεδόν στο σημείο  $P^*$ .

Κάθε σημείο της τομής Poincare αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες για το σύστημα. Από κάθε σημείο της τομής περνάει μια και μόνο τροχιά.

#### 6.4. Το μη γραμμικό διατηρητικό σύστημα

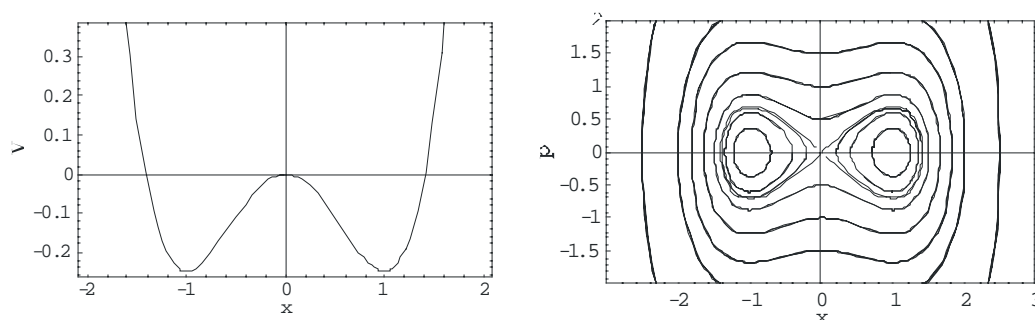
Εισάγουμε στο σύστημα μας τον μη γραμμικό όρο  $x^3$  θέτοντας  $b \neq 0$ :

$$\ddot{x} = ax - bx^3 + f \cos t \quad (59)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση Hamilton προκύπτει από τη σχέση (46). Για  $f=0$  το σύστημα είναι αυτόνομο ενός βαθμού ελευθερίας με συνάρτηση δυναμικού την

$$U = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \quad (60)$$

Θα θεωρήσουμε  $a=b=1$ , τιμές για τις οποίες έχουμε μόνο περατωμένες τροχιές, δύο ευσταθή σημεία ισορροπίας για  $x=-1$  και  $x=1$  και ένα ασταθές σημείο ισορροπίας για  $x=0$ . Η δυναμική του συστήματος απεικονίζεται στο φασικό διάγραμμα του σχήματος 6. Έχουμε γενικά μη αρμονικές ταλαντώσεις είτε γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας για ενέργεια  $E < 0$  είτε γύρω και από τα δύο σημεία για  $E > 0$ . Στο σημείο  $(0,0)$  ξεκινούν και καταλήγουν οι ασταθείς και ευσταθείς πολλαπλότητες που σχηματίζοντας την διαχωριστική καμπύλη του συστήματος.



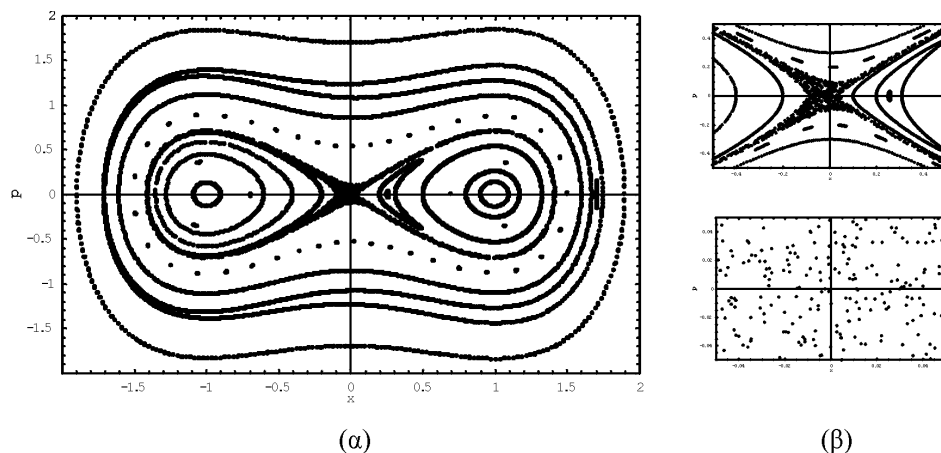
**Σχήμα 17** Το δυναμικό και το φασικό διάγραμμα του συστήματος (59) για  $f=0$  και  $a=b=1$ .

Εισάγοντας τον όρο της εξωτερικής διέγερσης ( $f \neq 0$ ) έχουμε ένα διατηρητικό μη αυτόνομο μη γραμμικό σύστημα. Αντί του φασικού διαγράμματος του σχήματος 6 πρέπει να χρησιμοποιηθεί η τομή Poincare για την εποπτεία της δυναμικής του συστήματος. Θεωρώντας μια μικρή τιμή για την εξωτερική διέγερση ( $f=0.002$ ) παίρνουμε την τομή Poincare του σχήματος 7. Οι αρχικές συνθήκες, που αντιστοιχούσαν σε περιοδικές τροχιές για το αυτόνομο σύστημα, μετατρέπονται εν γένει σε ημιπεριοδικές τροχιές (βλ. Σχήμα 8α) και σχηματίζουν αναλλοίωτους κύκλους πάνω στην τομή. Όμως ανάμεσα σε αυτούς μπορούμε να διακρίνουμε τροχιές που δίνουν πεπερασμένο αριθμό σημείων στην τομή και κατά συνέπεια αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές πολλαπλής περιόδου (πχ για  $p(0)=0$ ,  $x(0) \approx 0.695$  έχουμε περιοδική τροχιά περιόδου 3). Αυτό συμβαίνει σε περιοχές όπου η αντίστοιχη τροχιά του αυτόνομου συστήματος έχει περίοδο  $2\pi q$ ,  $q \in \mathbb{Q}$ . Στις αριθμητικές μελέτες, λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των αριθμών, η παραπάνω συνθήκη ισχύει πάντα. Όμως ο παρανομαστής του  $q$  είναι γενικά μεγάλος αριθμός και τα σημεία στην τομή φαίνεται στη πράξη να σχηματίζουν μια συνεχή καμπύλη.

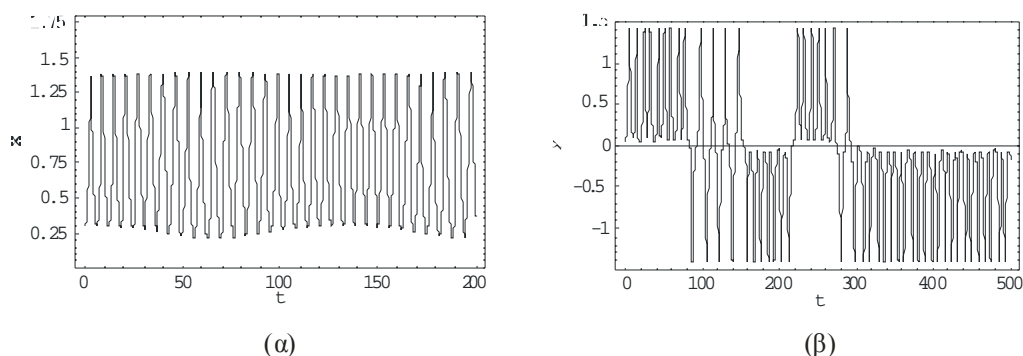
Τα ευσταθή σημεία ισορροπίας για  $f=0$  μετατρέπονται σε ευσταθείς περιοδικές τροχιές περιόδου 1 ( $T=2\pi$ ). Επίσης εμφανίζονται δύο ακόμη περιοδικές τροχιές περιόδου 1, μια ευσταθής και μια ασταθής, στις θέσεις  $x \approx \pm 1.715$  οι οποίες προκαλούν μια σημαντική διαφοροποίηση στην τοπολογία μεταξύ του φασικού διαγράμματος του σχήματος 5 και της τομής του σχήματος 6. Την εμφάνιση νέων ευσταθών περιοδικών τροχιών περιόδου 1 παρατηρούμε και στα σημεία  $p(0)=0$ ,  $x(0) \approx \pm 0.25$ . Πέρα από τις παραπάνω σημαντικές μεταβολές της δυναμικής που επέφερε η μικρή εξωτερική διέγερση, προκύπτει και ένα νέο χαρακτηριστικό. Παρατηρούμε ότι γύρω από τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες στο  $(0,0)$ , οι αρχικές συνθήκες οδηγούν σε τροχιές που απεικονίζονται στην τομή Poincare με σημεία που διασκορπίζονται άτακτα και καταλαμβάνουν μια ζώνη πεπερασμένου πλάτους



(βλ. Σχήμα 7β). Η χρονική εξέλιξη μιας τέτοιας τροχιάς παρουσιάζεται στο σχήμα 8β και δείχνει μια απρόβλεπτη συμπεριφορά. Οι τροχιές αυτές ονομάζονται **χαοτικές** και η περιοχή στην οποία εμφανίζονται **χαοτική περιοχή**. Ειδικότερα για το συγκεκριμένο Χαμιλτονιανό σύστημα το χάος χαρακτηρίζεται ως **ομοκλινικό** και προκύπτει από μια πολύπλοκη δομή που δημιουργούν οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες του συστήματος (βλ. Σ. Ιχτιάρογλου, «Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton»).

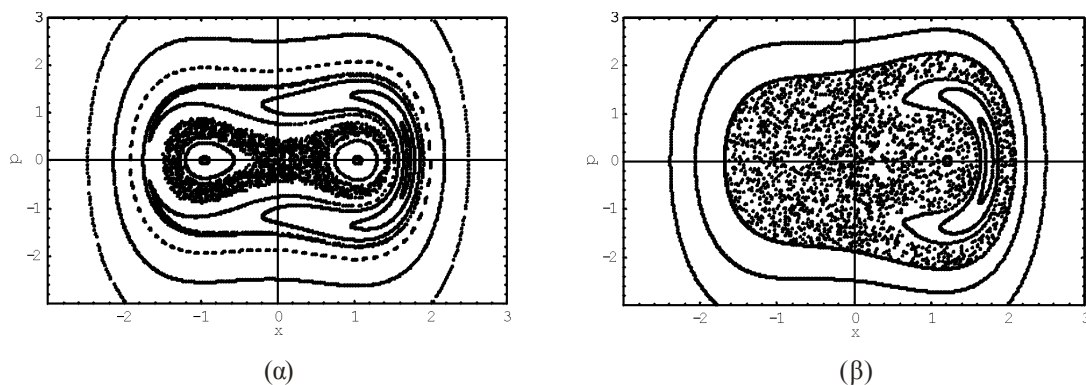


**Σχήμα 18** α) Τομή Poincare για  $f=0.002$ . β) Μεγεθύνσεις της τομής γύρω από το  $(0,0)$ .



**Σχήμα 19** Η χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $x$  κατά μήκος μιας α) ημιπεριοδικής τροχιάς ( $x(0)=0.3$ ,  $p(0)=0$ ) και β) χαοτικής τροχιάς ( $x(0)=0.03$ ,  $p(0)=0$ ).

Αυξάνοντας την παράμετρο  $f$  της εξωτερικής διέγερσης, οι χαοτικές περιοχές μεγαλώνουν και όλο και περισσότερες αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν σε χαοτικές τροχιές (Σχήμα 9). Βασικό χαρακτηριστικό των χαοτικών τροχιών είναι η ευαίσθητη εξάρτησή τους από τις αρχικές συνθήκες. Αν η τροχιά  $T_0$  αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες  $(x_0, p_0)$  τότε η τροχιά  $T_1$  με αρχικές συνθήκες  $(x_0 + \delta x, p_0 + \delta p)$ , όπου  $\delta x, \delta p$  αυθαίρετα μικρές ποσότητες, ενώ αρχικά παρουσιάζει την ίδια σχεδόν εξέλιξη με την  $T_0$ , πολύ γρήγορα απομακρύνεται και οι δύο τροχιές μοιάζουν εντελώς ασυσχέτιστες. Η ευαισθησία αυτή γίνεται επίσης εμφανής αν αλλάξουμε την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Χαοτικές τροχιές που αντιστοιχούν στις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά υπολογίζονται με διαφορετική ακρίβεια ή διαφορετική αριθμητική μέθοδο γίνονται αργά ή γρήγορα ασυσχέτιστες.



Σχήμα 20 Τομές Poincare για α)  $f=0.05$  β)  $f=0.2$

### 6.5. Το μη γραμμικό σύστημα με απώλειες

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το σύστημα (47) για  $a=b=1$ ,  $d>0$  και  $f\neq 0$ . Έχουμε δηλαδή την διατηρητική εξίσωση (59) στην οποία προσθέτουμε τον όρο απωλειών:

$$\ddot{x} = x - x^3 - d\dot{x} + f \cos t \quad (61)$$

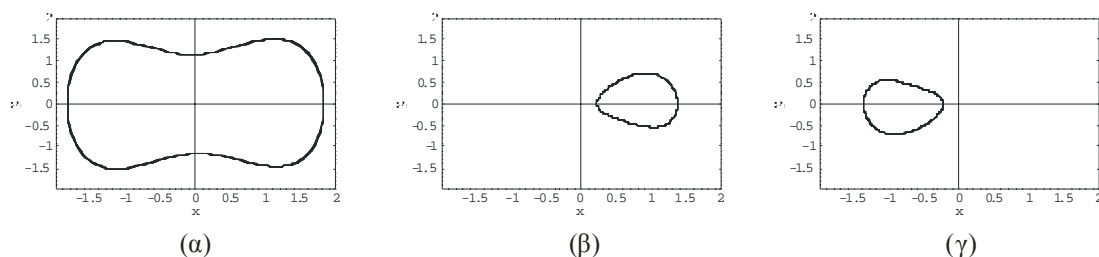
Για  $f=0$ , λόγω των απωλειών όλες οι τροχιές του συστήματος καταλήγουν σε ένα από τα δύο ευσταθή σημεία που παρουσιάζει το σύστημα τα οποία είναι κόμβοι ή εστίες ανάλογα με την τιμή του συντελεστή απωλειών  $d$ .

Για  $f\neq 0$  η (61) είναι γνωστή ως εξίσωση του **Duffing**. Στη γραμμική περίπτωση, ο συνδυασμός απωλειών και εξωτερικής διέγερσης οδηγεί εν γένει τις λύσεις (που βρίσκονται αναλυτικά) σε οριακό κύκλο. Εισάγοντας τον μη γραμμικό όρο, θα προχωρήσουμε στην αριθμητική μελέτη της δυναμικής του συστήματος για  $f=0.5$  και θεωρώντας ελεύθερο παράμετρο το συντελεστή αντίστασης  $d$ . Για την προβολή των τροχιών στο επίπεδο  $xp$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω κώδικα (Πρόγραμμα 6.5α) :

```
Clear["Global`*"]
a = 1; b = 1; d = 0.8; f = 0.5;
x0 = 0; p0 = 0;
tmax = 2000; tmin = tmax - 100;
deq1 = x'[t] == p[t];
deq2 = p'[t] == a x[t] - b x[t]^3 - d p[t] + f Cos[t];
sol = NDSolve[{deq1, deq2, x[0] == x0, p[0] == p0}, {x, p}, {t, 0, tmax}, MaxSteps -> ∞,
  AccuracyGoal -> 10, PrecisionGoal -> 10];
xt = x /. sol[[1]]; pt = p /. sol[[1]];
ParametricPlot[{xt[t], pt[t]}, {t, tmin, tmax}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  PlotPoints -> 2000, Frame -> True, FrameLabel -> {"x", "p"}]
```

Το πρόγραμμα επιλύει το σύστημα στο χρονικό διάστημα  $(0, t_{\max})$  αλλά η τροχιά παρουσιάζεται στο διάστημα  $(t_{\min}, t_{\max})$  ώστε να αποκοπεί το μεταβατικό στάδιο μέχρι η τροχιά να προσεγγίσει αρκετά την τελική της κατάσταση λόγω των απωλειών.

Για μικρές τιμές του συντελεστή αντίστασης (πχ  $d=0.1$ ), το πλάτος της εξωτερικής διέγερσης που θέσαμε είναι αρκετά μεγάλο ώστε το σύστημα καταλήγει στον οριακό κύκλο του σχήματος 10α που εκτείνεται περίπου στο διάστημα  $-1.7 < x < 1.7$ . Αντίθετα για μεγάλες τιμές της  $d$  (βλ. σχήμα 10β,γ) η τροχιά καταλήγει σε έναν μικρότερο οριακό κύκλο γύρω από το σημείο  $(1,0)$  ή  $(-1,0)$ . Η σύγκλιση της τροχιάς προς τον οριακό κύκλο παρουσιάζει γενικά ανώμαλα χαρακτηριστικά μέχρι να προσεγγίσει αρκετά τον οριακό κύκλο.

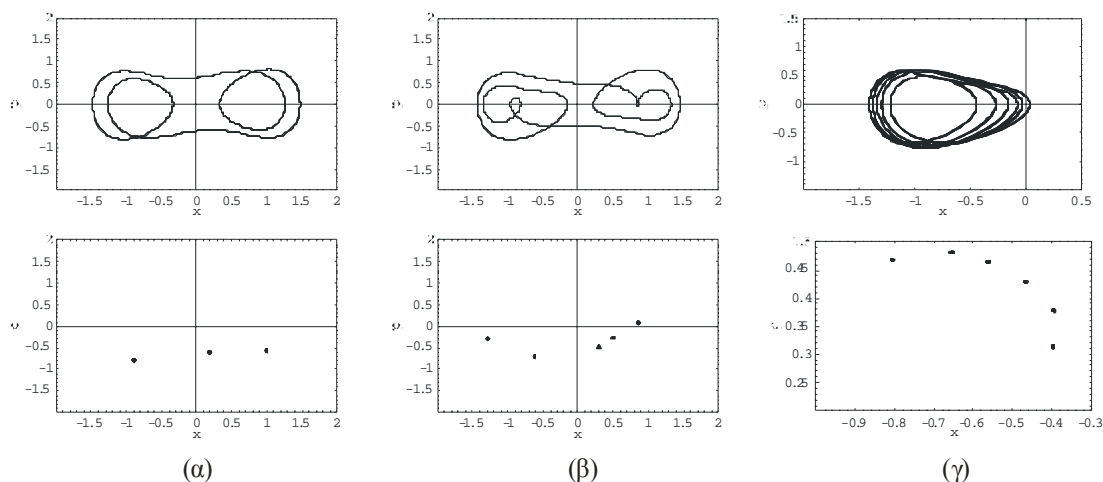


**Σχήμα 21** Οριακοί κύκλοι στις οποίες καταλήγουν οι τροχιές για α)  $d=0.1$  β)  $d=0.8$  για αρχικές συνθήκες  $x(0)=p(0)=0$  γ)  $d=0.8$  για αρχικές συνθήκες  $x(0)=-0.5, p(0)=0.0$ .

Η τομή Poincare του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί σε συνέχεια του προγράμματος 6.5α από τον κώδικα (Πρόγραμμα 6.5β)

```
data = {}; t = tmin;
While[t < tmax, AppendTo[data, {xt[t], pt[t]}]; t += 2*Pi];
ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.02]}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
Frame -> True, FrameLabel -> {"x", "p"}]
```

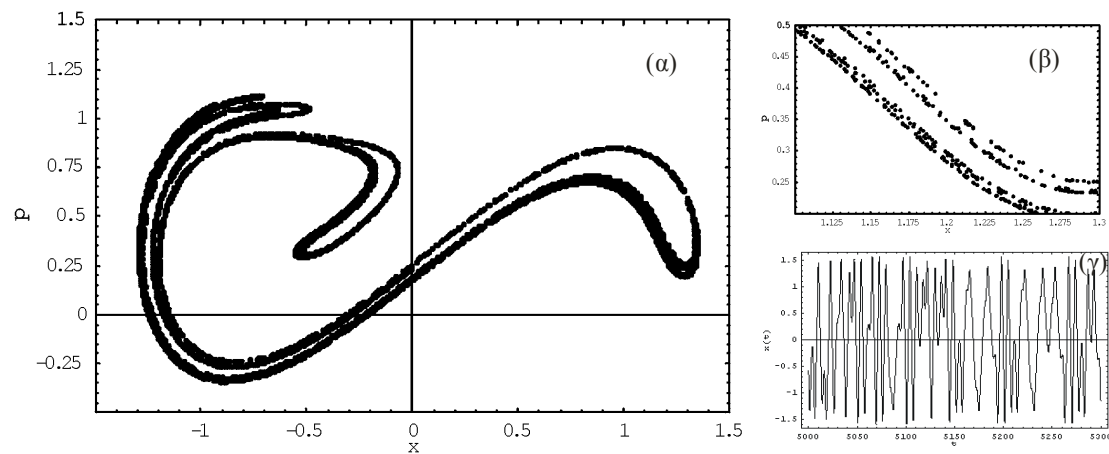
Σχεδιάζουμε και πάλι τα σημεία που προκύπτουν στο χρονικό διάστημα  $(tmin, tmax)$ . Για τις τροχιές του σχήματος 10, η τομή Poincare αποτελείται από ένα μοναδικό σημείο σε κάθε περίπτωση δείχνοντας ότι η τροχιά καταλήγει να εξελίσσεται περιοδικά με περίοδο  $2\pi$ . Όμως μελετώντας το σύστημα για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $d$  μπορούμε να εντοπίσουμε οριακούς κύκλους μεγαλύτερης περιόδου. Μερικά παραδείγματα δίνονται στο σχήμα 11.



**Σχήμα 22** Οριακοί κύκλοι μεγάλης περιόδου και οι αντίστοιχες τομές Poincare α) περιόδου 3 για  $d=0.45$  β) περιόδου 5 για  $d=0.55$  γ) περιόδου 6 για  $d=0.69$ .

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις οδηγούν το σύστημα σε μια τακτική περιοδική εξέλιξη. Όμως η μεταβολές στην περιοδικότητα των τροχιών παρατηρούνται για «ακανόνιστες» τιμές ή διαστήματα της παραμέτρου  $d$ . Επίσης, από έναν οριακό κύκλο περιόδου  $n$ , με μια μικρή μεταβολή της παραμέτρου μπορεί να περάσουμε σε οριακό κύκλο περιόδου  $2n$  και στη συνέχεια σε  $4n$  κ.ο.κ. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **διπλασιασμός περιόδων** και μέσα σε ένα πεπερασμένο, και εν γένει, μικρό διάστημα μεταβολής της παραμέτρου παίρνουμε έναν «οριακό κύκλο άπειρης περιόδου». Η απεικόνιση μιας τέτοιας τροχιάς στη τομή Poincare αποτελείται από ένα σύνολο άπειρων σημείων που αποτελούν ένα ελκτικό σύνολο (basin of attraction) στο οποίο καταλήγουν τα σημεία της απεικόνισης Poincare όλων των τροχιών του συστήματος (δηλαδή ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών). Το ελκτικό αυτό σύνολο δεν αποτελεί μια καμπύλης διάστασης 1 ούτε και καταλαμβάνει μια περιοχή διάστασης 2 του επιπέδου της τομής. Πρόκειται για ένα μορφοκλασματικό σύνολο διάστασης  $1 < n < 2$  που

παρουσιάζει αυτό-ομοιότητα υπό κλίμακα (self similarity). Ονομάζεται **παράξενος ελκυστής** (strange attractor) και οι τροχιές παρουσιάζουν μη προβλέψιμη εξέλιξη και με ευαίσθητη εξάρτηση ως προς τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή είναι χαοτικές. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο σχήμα 12.



**Σχήμα 23** α) Παράξενος ελκυστής της εξίσωσης Duffing ( $d=0.3$ ,  $f=0.5$ ) β) μια μεγέθυνση του ελκυστή. γ) ένα τμήμα της χρονικής εξέλιξης της μεταβλητής  $x$ .

**Κεφάλαιο 7ο.****Διακριτά δυναμικά συστήματα - Απεικονίσεις**

Η έννοια του διακριτού δυναμικού συστήματος περιγράφηκε συνοπτικά στην παράγραφο 2.1. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τη δυναμική τους μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων μιας και δύο διαστάσεων. Οι απεικονίσεις που παρουσιάζονται είναι από τις πλέον γνωστές στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων.

**7.1 Η λογιστική Απεικόνιση**

Μια μονοδιάστατη απεικόνιση από τον χώρο των πραγματικών αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς περιγράφεται με μία σχέση της μορφής

$$G: R \rightarrow R, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in N \quad (62)$$

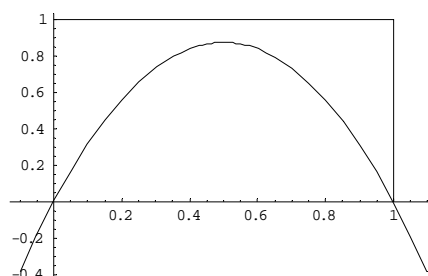
Το σύνολο των σημείων  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  αποτελεί μία τροχιά της (62) με αρχική συνθήκη την  $x=x_0$ . Τα σημεία για τα οποία ισχύει  $x_0=x_n \quad \forall n$  ονομάζονται **σταθερά σημεία** της απεικόνισης (fixed points), ενώ τα σημεία για τα οποία ισχύει  $x_n=x_{n+k} \quad \forall n$  ονομάζονται **k-περιοδικά σημεία**. Η έννοια της ευστάθειας ορίζεται παρόμοια όπως και στα συνεχή συστήματα.

Θεωρούμε την παρακάτω οικογένεια απεικονίσεων

$$f(x) = Rx(1-x) \quad (63)$$

καθώς η παράμετρος  $R$  μεταβάλλεται, η οποία για  $R < 4$  είναι της παρακάτω μορφής:

```
gr1 = Plot[3.5 x (1 - x), {x, -0.1, 1.1},
  DisplayFunction -> Identity]
Show[{gr1, Graphics[Line[{{0, 1}, {1, 1}, {1, 0}}]}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



*Άσκηση 7.1.* Κάντε ένα πρόγραμμα που να σχεδιάζει τις τροχιές της λογιστικής απεικόνισης. Τα διαδοχικά σημεία να ενώνονται με γραμμές για καλύτερη εποπτεία.

Στο επίπεδο  $(x, y)$  η συνάρτηση  $y = f(x)$  είναι μία παραβολή.

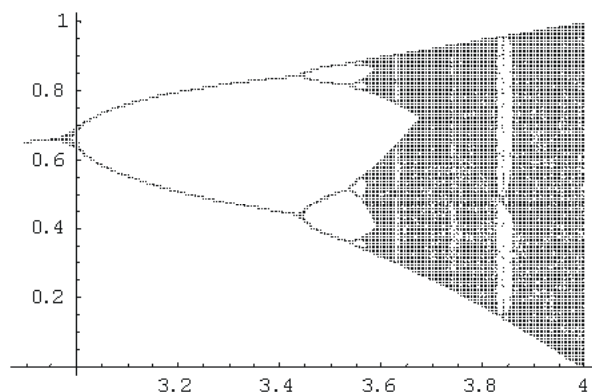
Η λογιστική απεικόνιση έχει δύο σταθερά σημεία που βρίσκονται από τη σχέση ορισμού των σταθερών σημείων απεικόνισης

$$f(x) = x \Rightarrow Rx(1-x) = x \quad (64).$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς  $x$ , βρίσκουμε τα σημεία  $x_0 = 0$  και  $x_1 = (R-1)/R$ . Η γραμμική ευστάθεια των σταθερών σημείων δίνεται από την απόλυτη τιμή της παραγώγου της συνάρτησης υπολογισμένης στο αντίστοιχο σταθερό σημείο. Αν  $|f'(x)| < 1$  στο  $x_0$  ή στο  $x_1$ , τότε το αντίστοιχο σημείο είναι γραμμικά ευσταθές και ευσταθές για τη μη γραμμική συνάρτηση. Εύκολα υπολογίζεται ότι  $|f'(x_0)| < 1$  για  $-1 < R < 1$  και  $|f'(x_1)| < 1$  για  $1 < R < 3$ . Επομένως το μηδέν είναι ευσταθές σταθερό σημείο για  $-1 < R < 1$  και για  $R > 1$  γίνεται ασταθές, ενώ το  $x_1$  είναι ευσταθές σταθερό σημείο για  $1 < R < 3$  και για  $R > 3$  γίνεται ασταθές σταθερό σημείο. Για  $R = 3$  εμφανίζεται ένα περιοδικό σημείο περιόδου δύο το οποίο αποτελεί λύση της εξίσωσης ορισμού ενός περιοδικού σημείου με περίοδο δύο, δηλαδή

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) = x_n \quad \eta' \quad f^2(x) = f(f(x)) = x \quad (65)$$

Η ευστάθεια των περιοδικών σημείων ορίζεται όπως και αυτή των σταθερών σημείων θεωρώντας την απεικόνιση  $f^k$ , όπου  $k$  η περίοδος. Το σημείο περιόδου 2 είναι ευσταθές για



Σχήμα 24 . Ο διπλασιασμός περιόδων στην λογιστική απεικόνιση.

κάποιο διάστημα τιμών του  $R$ ,  $(3, R_2)$  και μετά γίνεται ασταθές. Για  $R = R_2$  δημιουργείται ένα περιοδικό σημείο περιόδου  $2^2$  κ.τ.λ. Γενικώς, για  $R = R_n$  δημιουργείται ένα ευσταθές περιοδικό σημείο περιόδου  $2^n$ , το οποίο για  $R = R_{n+1}$  γίνεται ασταθές και για το ίδιο  $R_{n+1}$  δημιουργείται ένα ευσταθές περιοδικό σημείο περιόδου  $2^{n+1}$ . Αυτό το σενάριο, που εμφανίζεται συχνά και στις απεικονίσεις και στις διαφορικές εξισώσεις, ονομάζεται σενάριο διπλασιασμού της περιόδου και οδηγεί σε χαοτικά φαινόμενα για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου, πράγμα που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Για  $R = R_\infty = 3.5699456...$  έχουν εμφανιστεί όλα τα περιοδικά σημεία περιόδου  $2^n \forall n$  και έχουν γίνει όλα ασταθή. Ένα μέτρο σύγκλισης των τιμών  $R_n$  στο  $R_\infty$  είναι ο αριθμός

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} \quad (66)$$

τον οποίο ο Feigenbaum βρήκε αριθμητικά ότι είναι ίσος προς  $\delta = 4.669202...$ . Ο αριθμός  $\delta$  ονομάστηκε και παγκόσμια σταθερά γιατί ισχύει για μια μεγάλη οικογένεια μονοδιάστατων απεικονίσεων που έχουν ένα μη εκφυλισμένο μέγιστο. Αυτές εμφανίζουν το σενάριο διπλασιασμού περιόδου που έχει βρεθεί και θεωρητικά από τους Feigenbaum, Coullet, Collet, Eckmann κ.α. Παρόλα αυτά ακόμα παραμένουν αναπάντητα ερωτήματα και επίσης έχουν μελετηθεί αριθμητικά δισδιάστατες απεικονίσεις που εμφανίζουν το σενάριο διπλασιασμού περιόδου και δεν έχουν τους ίδιους παγκόσμιους αριθμούς.

Για  $R_\infty < R < 4$ , λίγα πράγματα έχουν αποδειχθεί. Υπάρχει το θεώρημα του Sharkovskii που ισχύει γενικά για μονοδιάστατες απεικονίσεις και κατατάσσει τα περιοδικά σημεία με κάποια διάταξη (διαφορετική αυτή των φυσικών αριθμών). Αποδεικνύει ότι αν μία μονοδιάστατη απεικόνιση  $f(x)$  έχει περιοδικά σημεία περιόδου  $n$ , τότε έχει και περιοδικά σημεία περιόδου  $k$ , όπου  $n \triangleright k$  (όπου το σύμβολο  $\triangleright$  χρησιμοποιείται για να δηλώσει το «μεγαλύτερο» σε αυτή τη διάταξη). Το θεώρημα του Sharkovskii αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος των Lee και Yorke ότι σε μία μονοδιάστατη απεικόνιση αν υπάρχει η περίοδος τρία υπάρχουν όλες οι άλλες περίοδοι, μια και στη διάταξη του Sharkovskii  $3 \triangleright n \forall n$ . Επιπλέον για κάποιες από αυτές τις τιμές  $R_\infty < R < 4$  έχει αποδειχθεί ότι τα περισσότερα σημεία  $x$  έχουν τροχιές που είναι πυκνές στο διάστημα  $[0,1]$ . Αυτό είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα της τοπολογικής μεταβατικότητας που είναι μια από τις απαιτήσεις για να υπάρχει χάος, αλλά δεν είναι ισοδύναμη με χάος παρά μόνο με εργοδικότητα.

Στο σχήμα 24 παρουσιάζεται το διάγραμμα διακλαδώσεων της λογιστικής απεικόνισης, και πιο συγκεκριμένα η θέση των ευσταθών σταθερών σημείων. Το σχήμα μπορεί να προκύψει με τον παρακάτω κώδικα:

```

logistic = {};
For[a = 2.9, a ≤ 4, a += 0.001,
  b = NestList[a * # * (1 - #) &, 0.9, 200];
  For[i = 70, i ≤ 201, i++,
    logistic = Append[logistic, {a, b[[i]]}]]];
ptsz = 0.007;
ListPlot[logistic, PlotStyle → PointSize[ptsz]]

```

Για  $R = 4$  η λογιστική απεικόνιση γράφεται ως  $f(x) = 4x(1-x)$ . Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό  $x = h(\varphi) = \sin^2 \varphi$ , τότε παίρνουμε

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \rightarrow \sin^2 \varphi_{n+1} = \sin^2(2\varphi_n) \quad (67)$$

Επομένως μια και η  $h$  είναι συνεχής συνάρτηση, υπάρχει μία ημισυζυγία που μας πηγαίνει από την απεικόνιση Renyi  $\rho: S^1 \rightarrow S^1$  όπου  $\rho$  είναι η παρακάτω απεικόνιση

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \mod 1$$

στη λογιστική απεικόνισης για  $R = 4$ , δηλαδή

$$h \circ \rho(\varphi) = f \circ h(\varphi)$$

(δες σχέση (67)). Επομένως τροχιές της  $\rho$  απεικονίζονται σε τροχιές της  $f$  και οι τοπολογικές ιδιότητες της  $\rho$  μεταφέρονται σε ίδιες τοπολογικές ιδιότητες της  $f$ . Αποδεικνύεται με συμβολική δυναμική ότι το  $S^1$  είναι χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης του Renyi, άρα, εξαιτίας της τοπολογικής ημισυζυγίας, το  $[0,1]$  είναι χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο της λογιστικής απεικόνισης για  $R = 4$ .

## 7.2 Δισδιάστατες Απεικονίσεις – Η απεικόνιση του Henon

Μια δισδιάστατη απεικόνιση  $G: R^2 \rightarrow R^2$  ορίζεται συνήθως μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g_2(x_n, y_n) \end{aligned}, \quad x_n, y_n \in R, \quad n \in Z \quad (68)$$

Ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο  $P_0 = (x_0, y_0)$  και εφαρμόζοντας την απεικόνιση παίρνουμε ένα σύνολο από διακριτά σημεία  $P_i = (x_i, y_i)$  στο επίπεδο  $Oxy$  το οποίο το ονομάζουμε τροχιά ενώ ο δείκτης  $i$  μπορεί να θεωρηθεί ως χρόνος. Η μετάβαση από το σημείο  $P_i(x_i, y_i)$  στο  $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας μετασχηματισμός μεταβλητών. Έτσι θα έχουμε διατήρηση των εμβαδών αν ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (69)$$

έχει ορίζουσα μονάδα ( $|\det \mathbf{M}| = 1$ ). Οι δισδιάστατες απεικονίσεις με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται **διατηρητικές** (area preserving).

Ως σημεία ισορροπίας περιόδου 1 (ή σταθερά σημεία) ορίζουμε τα σημεία  $P^* = (x^*, y^*)$  για τα οποία

$$\begin{aligned} x_{n+1}^* &= g_1(x_n^*, y_n^*) = x_n^* = x^* \\ y_{n+1}^* &= g_2(x_n^*, y_n^*) = y_n^* = y^* \end{aligned}, \quad \forall n \quad (70)$$

Θεωρώντας  $x_n = x^* + \Delta x_n$  και  $y_n = y^* + \Delta y_n$ , το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σταθερό σημείο παίρνει την μορφή

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{n+1} \\ \Delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix} \quad (71)$$

Η γραμμική ευστάθεια των σταθερών σημείων προκύπτει από τις ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  του πίνακα  $\mathbf{M}$ .

Τα σημεία περιόδου  $k$  ορίζονται με ανάλογο τρόπο όπως τα σταθερά σημεία

$$\begin{aligned} x_{n+k}^* &= g_1^{(k)}(x_n^*, y_n^*) = x_n^* = x^* \\ y_{n+k}^* &= g_2^{(k)}(x_n^*, y_n^*) = y_n^* = y^* \end{aligned}, \quad \forall n \quad (72)$$

Δηλαδή ένα σημείο περιόδου  $k$  αποτελεί σταθερό σημείο της απεικόνισης

$$G^{(k)} = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ φορές}} \quad (73)$$

Η ευστάθεια αυτών των σημείων μελετάται όπως και στα απλά σταθερά σημεία μόνο που ο πίνακας  $\mathbf{M}$  υπολογίζεται για την απεικόνιση  $G^{(k)}$ .

Μερικές από τις ιδιότητες των απεικονίσεων (68) θα τις δούμε μέσω της απεικόνισης του Henon η οποία γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= -bx_n \end{aligned} \quad (74)$$

Η ορίζουσα του Ιακωβιανού της πίνακα θα είναι

$$\det \begin{bmatrix} -2ax_n & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b \quad (75)$$

Άρα η ορίζουσα είναι διατηρητική για  $|b|=1$  ενώ έχει απώλειες αν  $|b|<1$  (dissipative)

### Η διατηρητική περίπτωση

Θεωρούμε για την απεικόνιση (74) θεωρούμε  $b=1$  και  $a>-1$ . Τα σταθερά της σημεία θα προκύψουν από την επίλυση του συστήματος (70) :

**In[1]:** `g1 = 1 - a x^2 + y; g2 = -x;`

`eqs = Solve[{g1 == x, g2 == y}, {x, y}] // Simplify`

**Out[2]:** `{ {y -> (1 - Sqrt[1 + a])/a, x -> (-1 + Sqrt[1 + a])/a}, {y -> (1 + Sqrt[1 + a])/a, x -> -(1 + Sqrt[1 + a])/a} }`

Έχουμε λοιπόν δύο σταθερά σημεία, κατά σειρά, το Σ1 και το Σ2. Για τις διατηρητικές απεικονίσεις έχουμε είτε  $\lambda_1 = \lambda_2$  είτε  $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$ , δηλαδή ή είναι πραγματικές και αντίστροφες ή είναι συζυγείς μιγαδικές μέτρου μονάδας. Αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} |\text{Trace} \mathbf{M}(x^*, y^*)| &< 2 \quad \text{ευσταθεια} \\ |\text{Trace} \mathbf{M}(x^*, y^*)| &> 2 \quad \text{ασταθεια} \end{aligned} \quad (76)$$

Για τα παραπάνω σημεία θα έχουμε

**In[3]:** `M = ( D[g1, x] D[g1, y] ; D[g2, x] D[g2, y] );`

`M1 = M /. eqs[[1]]; (*Jacobian for the 1st fixed point*)`

`M2 = M /. eqs[[2]]; (*Jacobian for the 2nd fixed point*)`

`tr1 = Tr[M1]; tr2 = Tr[M2];`

`Print["Trace of M1 = ", tr1, " trace of M2 = ", tr2];`

`Print["Eigenvalues : "]`

`l1 = Eigenvalues[M1] // Simplify`

`l2 = Eigenvalues[M2] // Simplify`

Trace of M1 =  $-2(-1 + \sqrt{1+a})$  trace of M2 =  $2(1 + \sqrt{1+a})$



Eigenvalues :

$$\text{Out}[9]= \left\{ 1 - \sqrt{1+a} - \sqrt{1+a-2\sqrt{1+a}}, 1 - \sqrt{1+a} + \sqrt{1+a-2\sqrt{1+a}} \right\}$$

$$\text{Out}[10]= \left\{ 1 + \sqrt{1+a} - \sqrt{1+a+2\sqrt{1+a}}, 1 + \sqrt{1+a} + \sqrt{1+a+2\sqrt{1+a}} \right\}$$

Για το σημείο Σ2 παρατηρούμε ότι  $|\text{trace}M2| > 2$  για κάθε  $a > -1$ , δηλαδή είναι πάντα ασταθές. Για το σημείο Σ1 έχουμε  $|\text{trace}M2| < 2$  για  $-1 < a < 3$ , δηλαδή ευστάθεια στο διάστημα αυτό και αστάθεια για  $a > 3$ .

**Άσκηση 7.2:** Δείξτε για το παραπάνω παράδειγμα ότι για  $-1 < a < 3$  οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με μέτρο μονάδα.

Υπολογίζοντας τροχιές (πχ με το παρακάτω πρόγραμμα) με τυχαίες αρχικές συνθήκες μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι γενικά οι τροχιές διαφεύγουν στο άπειρο πολύ γρήγορα. Μόνο κοντά στο ευσταθές σημείο Σ1 μπορούμε να βρούμε περατωμένες τροχιές. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε  $a=1$ , έχουμε τα σημεία ισορροπίας

$$(x^*, y^*) = (-1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) \quad (|\text{trace}M| = 2(-1 + \sqrt{2}) \approx 0.82 < 2)$$

Οι τροχιές γύρω από το Σ1 αποτελούνται από διακριτά σημεία τα οποία καθώς  $n \rightarrow \infty$  σχηματίζουν κλειστές καμπύλες. Πολύ κοντά στο Σ1 μοιάζουν με ελλείψεις όπως φαίνεται και από το σχήμα 25.

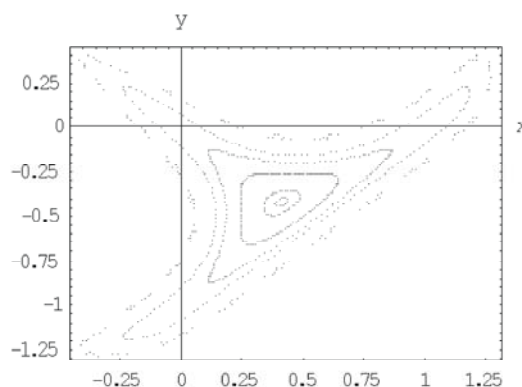
```

In[1]:= (*T1. Initial Configuration*)
Clear["Global`*"]
data = {}; (*list for data (x,y)*)
a = 1; (*parameter value and mapping*)
g1[x_, y_] = 1 - a x^2 + y;
g2[x_, y_] = -x;

In[5]:= (*T2. Initial conditions and iterations*)
x0 = 0.5; y0 = -0.5;
nn = 200; (*number of iterations*)
For[i = 1, i ≤ nn, i++,
{
  x1 = g1[x0, y0]; y1 = g2[x0, y0];
  AppendTo[data, {x1, y1}]; x0 = x1; y0 = y1;
}]

In[8]:= (*T3. Plot Trajectories*)
ListPlot[data, Frame → True, AxesLabel → {"x", "y"}]

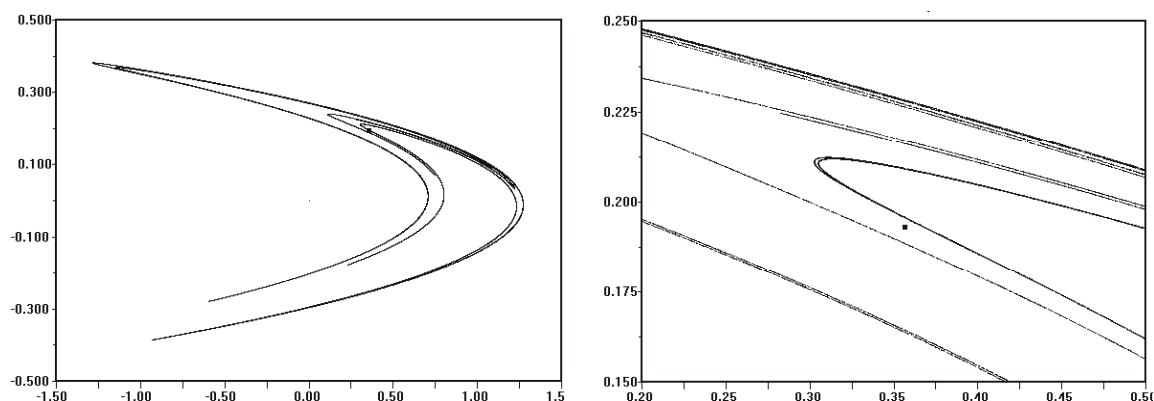
```



**Σχήμα 25.** Περατωμένες τροχιές γύρω από το ευσταθές σημείο της απεικόνισης του Henon.

### Η περίπτωση με απώλειες

Θέτοντας για την παράμετρο  $b$  τιμές στο διάστημα  $(-1, 1)$  τα εμβαδά του επιπέδου  $x-y$  συρρικνώνονται. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 4 η συρρίκνωση των εμβαδών οδηγεί τις τροχιές στα ευσταθή σημεία ισορροπίας τα οποία είναι είτε κόμβοι είτε εστίες. Μια παρόμοια κατάσταση εν' γένει συμβαίνει και για τις δισδιάστατες απεικονίσεις. Όμως όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5 (εξίσωση του Duffing με απώλειες) η συρρίκνωση των εμβαδών μπορεί να οδηγήσει τις τροχιές πάνω σε έναν παράξενο ελκυστή, όπου η εξέλιξη των τροχιών είναι χαοτική. Η περίπτωση αυτή μπορεί πράγματι να συμβεί για το σύστημα (74) δίνοντας τον παράξενο ελκυστή του Henon με διάσταση  $d \approx 1.26$  (σχήμα 26).



**Σχήμα 26.** Ο παράξενος ελκυστής του Henon για  $a=1.4$ ,  $b=-0.3$ . Στο αριστερό σχήμα ο ελκυστής φαίνεται σαν μια συνήθη καμπύλη. Όμως στην μεγέθυνση δεξιά παρατηρούμε ότι η καμπύλη σχηματίζεται με την παρουσία πολλών παράλληλων. Αυξάνοντας την μεγέθυνση θα παρατηρούμε το ίδιο σενάριο να επαναλαμβάνεται.

### 7.3 Η τυπική Απεικόνιση

Η τυπική απεικόνιση μπορεί να περιγράψει την τομή Poincare ενός διαταραγμένου ταλαντωτή (μη αυτόνομο σύστημα 1BE) ή γενικότερα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της εξέλιξης ενός συντηρητικού συστήματος 2BE όπως αυτά εμφανίζονται σε μια τομή Poincare (βλ. κεφ. 6). Ορίζεται ως εξής

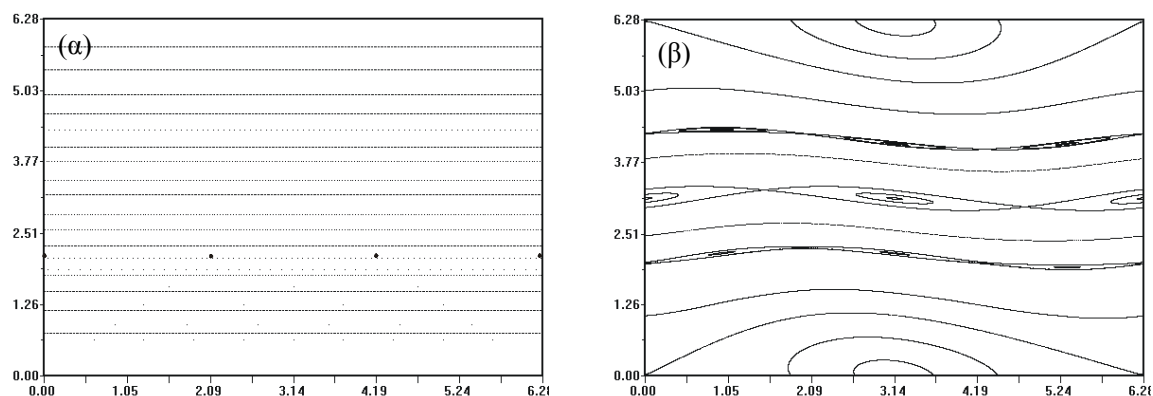
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \mod 2\pi \\ y_{n+1} &= y_n + k \sin(x_n + y_n) \mod 2\pi \end{aligned} \quad (77)$$

Η πράξη modulo περιορίζει πάντα τις τιμές των μεταβλητών και ο χώρος των τροχιών τις απεικόνισης είναι το τετράγωνο με αρχή το 0 και με πλευρά  $2\pi$ .

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας  $\mathbf{M}$  της (77) είναι μονάδα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $k$ . Τα σταθερά σημεία της απεικόνισης είναι το  $(0,0)$  που είναι ασταθές και το  $(0,\pi)$  που είναι ευσταθές για  $k < 4$ .

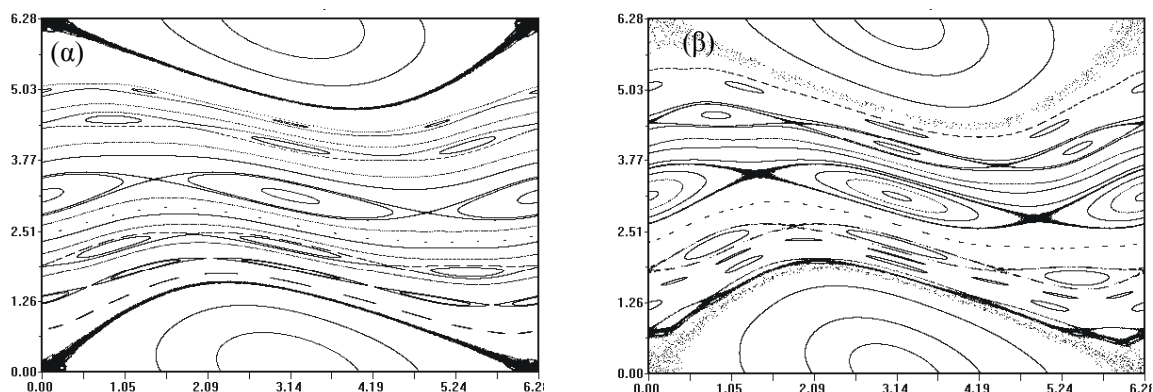
**Άσκηση 7.3.** Βρείτε τα σταθερά σημεία της απεικόνισης και μελετήστε την ευστάθειά τους με βάση την σχέση (76).

Παρατηρούμε ότι για  $k=0$  και  $y_0 \neq 0$  έχουμε  $y_n = y_0$  για κάθε  $n$  ενώ το  $x$  μεταβάλλεται κατά την σταθερή ποσότητα  $y_0$ . Άρα, στην περίπτωση αυτή, οι τροχιές της απεικόνισης σχηματίζουν αναλλοίωτες καμπύλες που είναι ευθείες, παράλληλες του άξονα  $x$ . Αν όμως ξεκινήσουμε με αρχική συνθήκη  $y_0 = 2\pi p/q$ , όπου  $p, q$  πρώτοι ακέραιοι τότε το  $x$  επιστρέφει στην αρχική του τιμή μετά από  $q$  επαναλήψεις και έχουμε μια περιοδική τροχιά περιόδου  $q$  ή αλλιώς έναν συντονισμό  $p:q$  τάξης  $|p|+|q|$ . Έτσι οι τροχιές που παίρνουμε είναι αυτές του σχήματος 27α όπου σημειώνουμε με έντονα σημεία τον συντονισμό 1:3 (προσοχή το σημείο στη θέση  $x=2\pi$  είναι το ίδιο με αυτό στη θέση  $x=0$ ). Η κατάσταση αυτή ( $k=0$ ) ονομάζεται *αδιατάρακτη*. Αν το  $k$  πάρει μικρές αλλά μη μηδενικές τιμές παρατηρούμε την κατάσταση του σχήματος 27β.



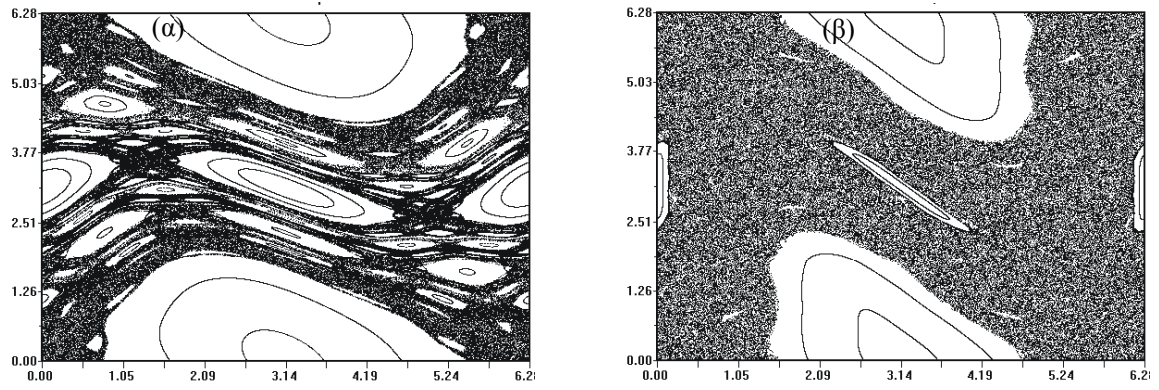
Σχήμα 27. Τροχιές της τυπικής απεικόνισης για α)  $k=0$  και β)  $k=0.3$

Παρατηρούμε ότι στους συντονισμούς  $p:q$  συνεχίζουν να υφίστανται  $2q$  σημεία (2 τροχιές περιόδου  $q$ ) μισά εκ' των οποίων είναι ελλειπτικά (ευσταθή) που περικλείονται από νησίδες και μισά υπερβολικά (ασταθή). Αυτό συμβαίνει σε κάθε συντονισμό αλλά το μέγεθος των νησίδων είναι στην πλειονότητα των περιπτώσεων πολύ μικρό και μικραίνει όσο αυξάνει η τάξη του συντονισμού. Το φαινόμενο αυτό περιγράφεται από θεώρημα του Poincare. Πρέπει να προσέξουμε επίσης το ένα ευσταθές σταθερό σημείο στο  $(\pi, 0)$  (ή ισοδύναμα στο  $(\pi, 2\pi)$ ) και το ένα ασταθές σταθερό σημείο στο  $(0, 0)$  (ή στο  $(0, 2\pi)$  ή στο  $(2\pi, 0)$  ή στο  $(2\pi, 2\pi)$ ). Αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου  $k$  παρατηρούμε πλέον τις νησίδες και σε άλλους συντονισμούς μεγαλύτερης τάξης (βλ. σχήμα 28).



Σχήμα 28. Τροχιές της τυπικής απεικόνισης για α)  $k=0.6$  και β)  $k=0.8$

Επίσης στο σχήμα 28α, παρατηρούμε ότι στο ασταθές σταθερό σημείο τα σημεία της τροχιάς δεν ανήκουν πάνω σε κάποια καμπύλη αλλά παρουσιάζουν έναν μικρό άτακτο διασκορπισμό. Οι τροχιές αυτές είναι **χαοτικές τροχιές** και εμφανίζονται στην περιοχή κάθε ασταθούς σημείου περιόδου  $q$  και γίνονται πιο εμφανείς όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου  $k$  (το φαινόμενο αυτό περιγράφεται από τα θεωρήματα των Morse-Smale). Στις παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε επίσης ότι πολλές αναλλοίωτες καμπύλες δεν έχουν σπάσει σε νησίδες. Καθώς όμως αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $k$  οι νησίδες μεγαλώνουν και συγκρούονται μεταξύ τους και οι αναλλοίωτες καμπύλες που τις διαχωρίζαν δεν υπάρχουν πλέον. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αλληλοεπικάλυψη συντονισμών** και δημιουργεί μεγάλο αριθμό χαοτικών τροχιών. Στο σχήμα 29α όλες οι αναλλοίωτες καμπύλες έχουν «σπάσει» και οι χαοτικές τροχιές μπορούν να διαχέονται από τα κενά που αφήνουν οι νησίδες. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου  $k$  το χάος κυριαρχεί (Σχήμα 29β).



Σχήμα 29. Τροχιές της τυπικής απεικόνισης για α)  $k=1.0$  και β)  $k=2.0$

**Άσκηση 7.4.** Γράψτε ένα πρόγραμμα στο Mathematica (όπως αυτό της απεικόνισης του Henon) που να σχεδιάσει διάφορες τροχιές της τυπικής απεικόνισης στο επίπεδο  $x$ - $y$ .

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- M.Abell, J.Braselton, *Differential Equations with Mathematica*, 2<sup>nd</sup> ed., Academic Press, 1997.
- R. Enns and G. McGuire, *Nonlinear Physics with Mathematica*, Birkhauser, 2001
- D.Kaplan and L.Glass, “Understanding Nonlinear Dynamics”, Springer-Verlag, 1995
- Σ.Ι. Ιχτιάρογλου και Ι.Δ. Χατζηδημητρίου, «Δυναμικά συστήματα και Χάος», Υπηρεσία Δημοσιευμάτων ΑΠΘ, 2000
- Ι.Δ. Χατζηδημητρίου, «Θεωρητική Μηχανική», Τόμος Α, Εκδ. Γιαχούλη-Γιαπούλη, 2000.
- Γ.Δ.Μπόζης, «Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές», Εκδόσεις Α.Π.Θ., 1988
- Σ. Τραχανάς, *Mathematica και εφαρμογές*, Πανεπ. Εκδόσεις Κρήτης, 2002
- Α. Μπούντης, *Μη γραμμικές Συνήθειες Διαφορικές εξισώσεις*, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, 1997
- L.Perko, “Differential Equations and Dynamical Systems”, Springer-Verlag, 1996.
- D.W. Jordan and P.Smith, “Nonlinear ODE’s”, Clarendon Press, 1987
- C. Robinson, “Dynamical Systems”, CRC press, 1995.
- Σ.Ι. Ιχτιάρογλου, «Εισαγωγή στην Μηχανική Χάμιλτον», Εκδ. Ζήτη, 2004.
- G.L. Baker and J.P.Gollub, “Chaotic Dynamics – An Introduction”, Cambridge Univ. Press, 1990.
- Γ. Θεοδώρου, *Εισαγωγή στη Mathematica*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2003
- Γ.Βουγιατζής, «Διαφορικές Εξισώσεις στο Mathematica», Σημειώσεις για την Αναμόρφωση του Π.Π.Σ., ΕΠΕΑΕΚ II, 2003.
- R. Gaylord, S.Kamin, P. Wellin, *Introduction to programming with Mathematica*, Springer, 1993
- T. Wickham-Jones, *Mathematica Graphics*, Springer, 1994
- S. Wolfram, *Mathematica Reference Guide*, Addison-Wesley Publ., 1992